Session 2000

BTS CHIMISTE

MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures ***Coefficient : 3***

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1 - (13 points)

On se propose d'étudier le système de réactions successives suivant : $A \to B \to C$.
On appelle x(t), y(t) et z(t) les concentrations respectives des produits A, B et C à l'instant t exprimé en minute.

A l'instant t = 0, on a les concentrations initiales : x(0) = a, y(0) = 0 et z(0) = 0.

Les lois de la cinétique chimique montrent que x, y et z sont solutions sur $[0 ; +\infty[$ du système (S) :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -k_1 x & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y & (2) \\ \dfrac{dz}{dt} = k_2 y & (3) \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont deux nombres réels distincts.

Première partie

1) Résoudre l'équation différentielle (1).
Déterminer la solution de (1) qui vérifie la condition x(0) = a.

2) a) Montrer que les solutions y du système (S) vérifient l'équation différentielle

$$(4) : y' + k_2 y = a k_1 e^{-k_1 t}.$$

b) Résoudre l'équation différentielle (4). Déterminer la solution de (4) qui vérifie la condition y(0) = 0.

3) a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a : $x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0$.
b) En déduire à l'aide des conditions initiales, la solution z du système (S).

Deuxième partie

On a réalisé une expérience du type $A \to B \to C$, à une température fixe et on a obtenu les résultats suivants sur les concentrations du produit A :

t_i (en mn)	0	0,5	1	2	4,5	6	7
$x_i = x(t_i)$ (en mol.L^{-1}).	2	1,213	0,736	0,271	0,022	0,005	0,002

On pose : $X = \ln x$.

1) a) Recopier et compléter le tableau suivant en donnant des résultats arrondis à 10^{-2} près:

t_i	0	0,5	1	2	4,5	6	7
$X_i = \ln x_i$							

b) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près du coefficient de corrélation de la série statistique (t_i ; X_i).

Un ajustement affine de X en t par la méthode des moindres carrés est-il justifié ?

2) a) Donner une équation de la forme $X = \alpha t + \beta$ de la droite de régression de X en t par la méthode des moindres carrés.

On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près des coefficients α et β.

b) Sachant que l'étude théorique montre que pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, on a $x(t) = a\, e^{-k_1 t}$ et que $x(0) = 2$, déterminer une valeur approchée de k_1 à 10^{-2} prés.

On admet pour la suite que : $a = 2$; $k_1 = 1$; $k_2 = 0,5$.

Troisième partie

On considère les fonctions x, y et z définies sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$x(t) = 2\, e^{-t} \qquad y(t) = 4\, (e^{-0,5\, t} - e^{-t}) \qquad z(t) = 2\, (1 - 2\, e^{-0,5\, t} + e^{-t}).$$

On appelle C_1, C_2 et C_3 leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

(Les unités graphiques sont : 2 cm pour l'unité en abscisse et 5 cm pour l'unité en ordonnée).

1) La courbe C_1 est tracée sur la feuille donnée en annexe.
En déduire le tableau de variation de la fonction x.

2) Étudier les variations de la fonction y.
On appelle t_M la valeur de t pour laquelle y admet un maximum y_M. Déterminer les valeurs exactes de t_M et de y_M.
Dresser le tableau de variation de y.

3)a) Montrer que C_3 admet une asymptote Δ.
b) Étudier les variations de z et dresser son tableau de variation.

4) Tracer la droite Δ et les courbes C_1, C_2 et C_3 dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

5) On appelle τ l'instant où les concentrations des produits A et B sont égales.
Déterminer par lecture graphique une valeur approchée de τ exprimé en minute.

EXERCICE 2 - (7 points)

Dans la fabrication de comprimés effervescents , il est prévu que chaque comprimé doit contenir 1625 mg de bicarbonate de sodium. Afin de contrôler la fabrication de ces médicaments, on a prélevé un échantillon de 150 comprimés et on a mesuré la quantité de bicarbonate de sodium pour chacun d'eux. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

Classes	[1610 ; 1615[	[1615 ; 1620[	[1620 ; 1625[	[1625 ; 1630[	[1630 ; 1635[
Effectifs	7	8	42	75	18

1) En convenant que les valeurs mesurées sont regroupées au centre de chaque classe, calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de la moyenne m et de l'écart type s de cet échantillon.

2) A partir des résultats obtenus pour cet échantillon, assimilé à un échantillon non exhaustif, donner les estimations ponctuelles $\hat{M}$ et $\hat{\sigma}$ de la moyenne M et de l'écart type σ de la quantité de bicarbonate de sodium dans la population (formée de l'ensemble de tous les comprimés fabriqués et supposée très grande).
Dans la question suivante on prendra pour valeur de σ son estimation $\hat{\sigma}$.

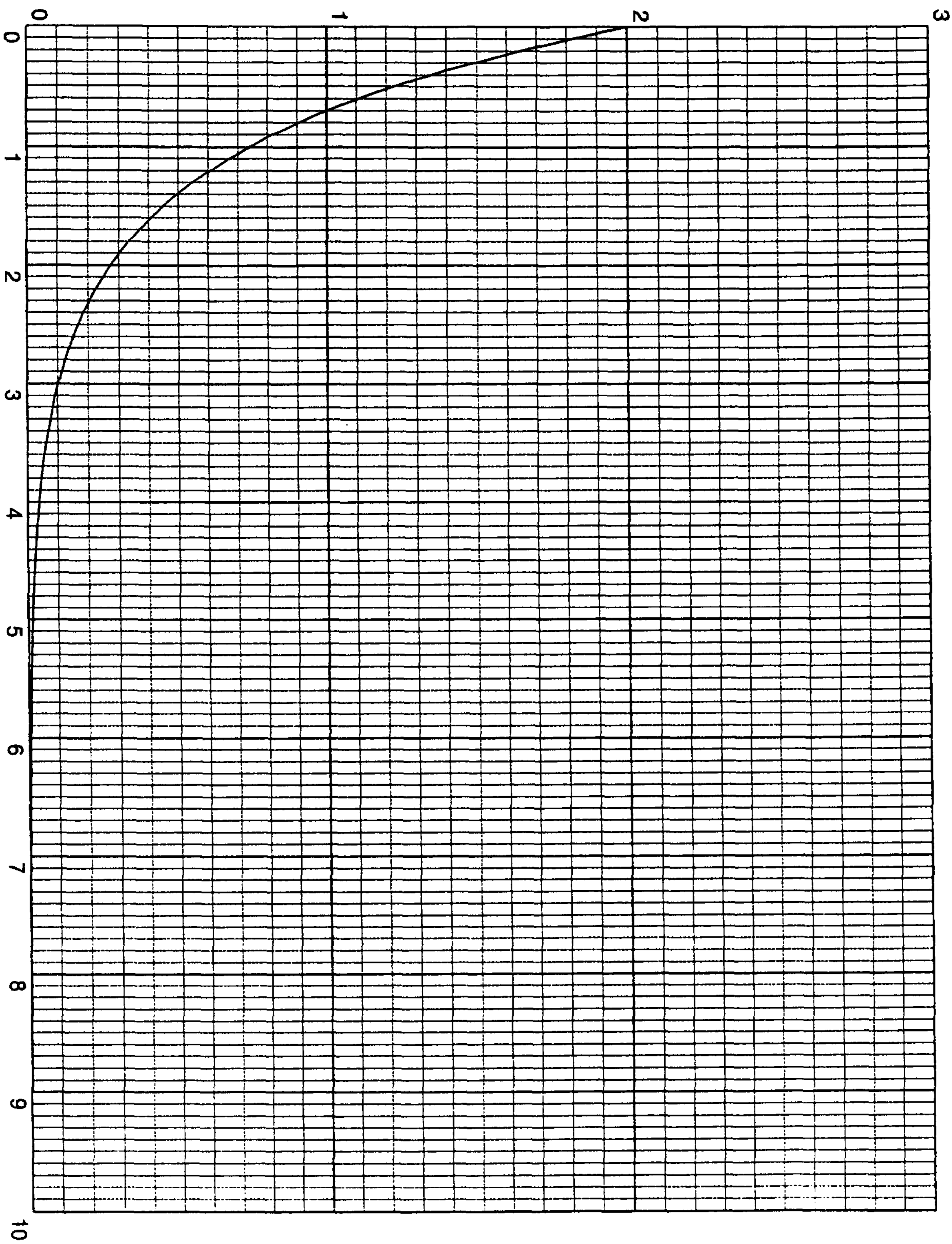
3) On appelle $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille n = 150 associe la quantité moyenne de bicarbonate de sodium de cet échantillon.

a) $\overline{X}$ peut-elle être approchée par une loi classique ? Si oui, laquelle ? Donner ses paramètres ?

b) Déterminer un intervalle de confiance de la quantité moyenne de bicarbonate de sodium dans la population avec le coefficient de confiance 95 %.
Calculer l'amplitude de cet intervalle et interpréter le résultat.

c) Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon prélevé pour connaître avec le coefficient de confiance 95 % la quantité moyenne de bicarbonate de sodium dans la population à 1 mg près ?

Annexe



BTS CHIMISTE

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

1 – Relations fonctionnelles :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b,\ où\ \ a > 0\ \ et\ \ b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), cht = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$

$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}), sht = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t),\ où\ \ a = \alpha + i\beta$

2 – Dérivées et Primitives :

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
$t^\alpha (\alpha \in \mathbf{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$
$\sin\ t$	$\cos\ t$
$\cos\ t$	$-\sin\ t$
$\tan\ t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$
$ch\ t$	$sh\ t$
$sh\ t$	$ch\ t$
$Arc\ \sin\ t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$Arc\ \tan\ t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$e^{at} (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}

3 – Développements limités :

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^a = 1 + \frac{a}{1!} t + \frac{a(a-1)}{2!} t^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

4 – Statistique descriptive :

a) Moyenne arithmétique :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i \qquad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i$$

b) Variance et écart-type :

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - (\bar{x})^2 \qquad \sigma = \sqrt{V}$$

c) Ajustement affine par la méthode des moindres carrés :

Covariance : $\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \bar{x}\,\bar{y}$

$$y = a\,x + b, \text{ où } \quad a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}} \;;\quad x = a'\,y + b', \quad \text{où} \quad a' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{y^2}}$$

d) Corrélation linéaire :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

5 – Probabilités :

a) Loi binomiale :

$$P(X=k)=C_n^k\,p^k q^{n-k} \quad \text{où} \quad C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$E(X)=np \qquad \sigma(X)=\sqrt{npq}$$

b) Loi de Poisson :

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad E(X)=\lambda \qquad V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3032	0,3293
2	0,0163	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0071	0,0126	0,0198
4		0,0002	0,0007	0,0015	0,0030
5			0,0001	0,0001	0,0003

k \ λ	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,223	0,135	0,0498	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,000	0,002	0,006	0,013
18									0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,000	0,002
21											0,001
22											0,000

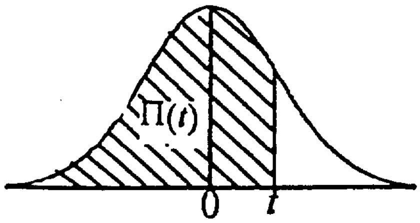
c) Loi normale :

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\aleph(0,1)$

$$\pi(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0, 776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0, 805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,952 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t :

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota. – La table donne les valeurs de $\pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : Pour t = 1,37 $\pi(t = 1{,}37) = 0{,}914\ 7$

Pour t = - 1,37 $\pi(t = -1{,}37) = 0{,}085\ 3$