Corrigé du BTS Groupement D - 14 mai 2018

EXERCICE 1 9 points

La scanographie est un procédé radiologique, réalisé à l'aide d'un scanner, qui permet de reconstruire informatiquement l'image d'une coupe du corps humain à partir d'une série d'analyses. Elle permet notamment de détecter des tumeurs.
Dans cet exercice, on s'intéresse aux scanographies réalisées dans un hôpital.

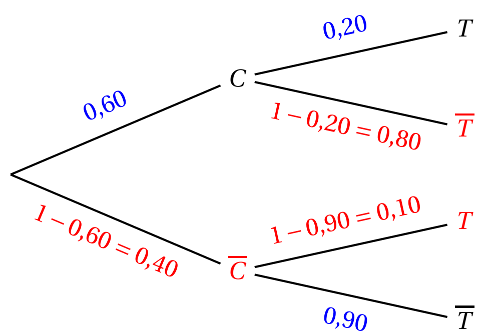
Partie A

Une étude effectuée dans cet hôpital montre que :

- 60 % des scanographies effectuées concernent le cerveau et, parmi celles-ci, 20 % détectent une tumeur ;
- 90 % des autres scanographies effectuées ne détectent pas de tumeur au patient.

Parmi les patients de l'hôpital qui ont besoin d'une scanographie, on en choisit un au hasard.
On note C l'évènement « le patient fait une scanographie du cerveau » et T l'évènement « le patient a une tumeur ».

1. On complète l'arbre pondéré :



2. La probabilité que le patient ait une tumeur est $P(T)$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(T) = P(C \cap T) + P(\overline{C} \cap T) = P(C) \times P_C(T) + P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(T) = 0{,}6 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}16$
3. La scanographie permet de détecter une rumeur au patient.
   La probabilité que cette tumeur ait été détectée au cerveau est
   $P_T(C) = \dfrac{P(C \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}6 \times 0{,}2}{0{,}16} = \dfrac{0{,}12}{0{,}16} = 0{,}75.$
4. Sur un échantillon de 40 patients atteints d'une tumeur au cerveau, un médecin constate que 25 patients ont été guéris après un traitement approprié.
   a. L'estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de patients guéris d'une tumeur au cerveau après un traitement approprié est $f = \dfrac{25}{40} = 0{,}625.$
   b. Un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion p est

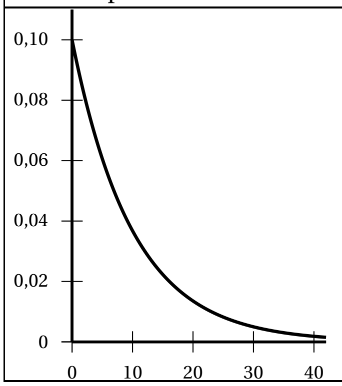
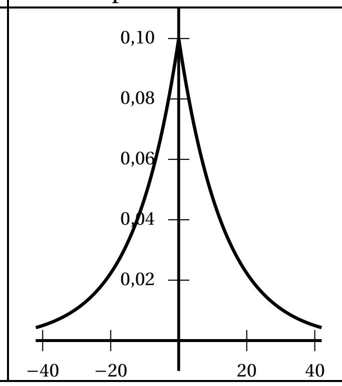
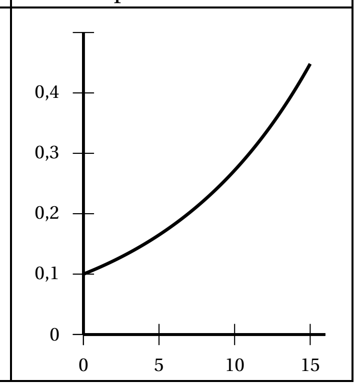
$$I = \left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f\left(1-f\right)}{n}}\ ;\ f + 1{,}96\sqrt{\frac{f\left(1-f\right)}{n}}\right]$$

$$= \left[0{,}625 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}625\,(1-0{,}625)}{40}}\ ;\ 0{,}625 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}625\,(1-0{,}625)}{40}}\right] \approx [0{,}475\ ;\ 0{,}775]$$

Partie B

On admet que le délai d'attente en jours pour réaliser une scanographie à cet hôpital suit une loi exponentielle de paramètre λ et que le délai d'attente moyen est égal à 10 jours.

1. Pour une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance mathématique est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.
   Or $E(T) = 10$ donc $\dfrac{1}{\lambda} = 10$ donc $\lambda = 0{,}10$.
2. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une seule représentation correspond à la densité de probabilité de cette loi exponentielle.

Représentation A	Représentation B	Représentation C
		

La bonne représentation est la **A.**

Explications | On sait que la fonction de densité d'une loi exponentielle de paramètre λ est la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ (ce qui élimine la représentation B), par $f(t) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$; cette fonction f est strictement décroissante (ce qui élimine la représentation C).

3. On rappelle que, si T est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout réel t de $[0\,;\,+\infty[$, on a : $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   La probabilité, arrondie au millième, que le délai d'attente d'un patient pour unescanographie ne dépasse pas 8 jours est $P(T \leqslant 8) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}10\times 8} \approx 0{,}551$.

Partie C

On admet que la probabilité, arrondie au centième, que le délai d'attente d'un patient pour une scanographie ne dépasse pas 8 jours est égale à 0,55.

On construit aléatoirement un échantillon de 200 patients de l'hôpital, qui se voient prescrire une scanographie. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de ces patients dont le délai d'attente ne dépasse pas 8 jours.

Question 1

La variable aléatoire X suit :

A. la loi binomiale de paramètres 200 et 0,55 ;
B. la loi normale de paramètres 200 et 0,55 ;
C. la loi exponentielle de paramètres 200 et 0,55

> Il s'agit d'une répétition d'épreuves indépendantes n'ayant que deux issues.
> **Réponse A.**

Question 2
La probabilité que le quart de ces 200 patients ait un délai d'attente qui ne dépasse pas 8 jours est égale à :

A. $P(X \leqslant 8)$; **B.** $P\left(X = \dfrac{1}{4}\right)$; **C.** $P(X = 50)$.

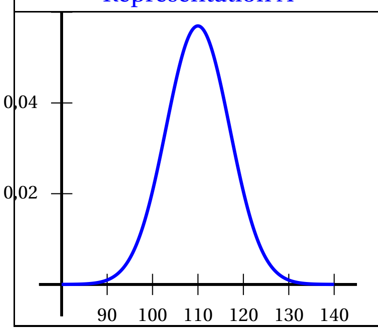
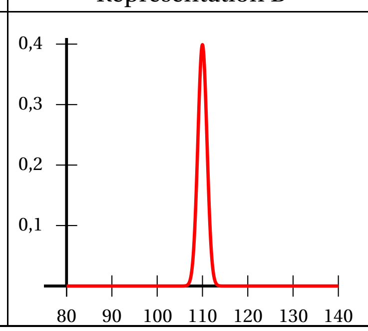
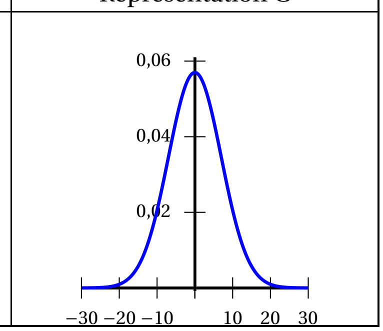
> La variable aléatoire X donne le nombre de patients dont le délai d'attente ne dépasse pas 8 jours. Si ce nombre est le quart de 200, c'est donc 50.
> **Réponse C.**

Question 3
La probabilité que moins de la moitié des 200 patients ait un délai d'attente qui ne dépasse pas 8 jours est égale à 10^{-3} près à :

A. 0,021 ; **B.** 0,068 ; **C.** 0,932.

> $P(X < 100) = P(X \leqslant 99) \approx 0{,}068$
> **Réponse B.**

Question 4 :
On admet que la loi suivie par la variable aléatoire X peut être approchée par une loi normale. La représentation graphique de cette loi normale est alors :

Représentation A	Représentation B	Représentation C
		

> On approche la loi binomiale de paramètres n et p par une loi normale de moyenne np et d'écart-type $\sqrt{np(1-p)}$ donc de moyenne $\mu = 110$ et d'écart-type σ environ égal à 7.
> On peut éliminer la représentation C qui correspond à une moyenne de 0.
> Dans une distribution normale, il y a 68 % de l'effectif dans l'intervalle $[\mu - \sigma\,;\,\mu + \sigma]$ ce qui correspond ici à l'intervalle $[103\,;\,117]$; ce qui élimine la représentation B.
> **Réponse A.**

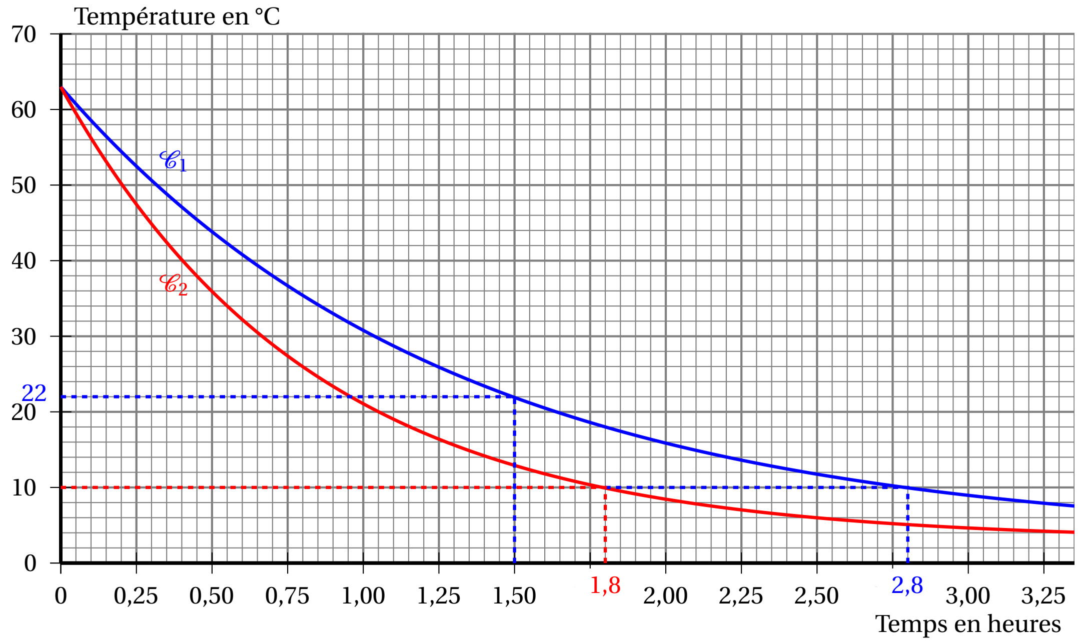
EXERCICE 2 11 points

Lors du processus de fabrication de plats cuisinés en restauration collective, le refroidissement est une phase cruciale pour éviter la croissance de germes.
La réglementation impose que le refroidissement rapide des barquettes de plats cuisinés soit opéré de telle manière que leur température ne demeure pas à des valeurs comprises entre +10 °C et +63 °C pendant plus de 2 heures (arrêté du 8 octobre 2013, dispositions particulières applicables aux établissements de restauration collective).

Une entreprise de restauration collective fabrique des barquettes de plats cuisinés, soumises à une attention particulière : lorsqu'elles ont atteint une température de +63 °C, elles sont placées dans une cellule de refroidissement rapide, et cela afin de respecter la réglementation précédente.

Partie A

On procède à deux réglages différents de la cellule de refroidissement rapide (réglage n° 1 et réglage n° 2). Sur le graphique ci-dessous, sont représentées les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, qui correspondent respectivement à la température d'une barquette placée dans la cellule en fonction du temps pour le réglage n° 1 et pour le réglage n° 2.



1. Graphiquement, on peut dire que la température de la barquette au bout de 90 minutes, ou 1,5 heure, dans la cellule de refroidissement rapide avec le réglage n° 1 est d'environ 22 °C.
2. **a.** Avec le réglage n° 1, la température de 10 °C est atteinte au bout de 2,8 heures, soit 2 heures 48 minutes ; donc le réglage n° 1 ne satisfait pas les conditions requises.

   b. Avec le réglage n° 2, la température de 10 °C est atteinte au bout d'environ 1,8 heure, soit environ 1 heure 48 minutes donc moins de 2 heures ; c'est le temps pendant lequel la barquette doit rester dans la cellule de refroidissement rapide.
3. Un employé en charge du réglage de la cellule de refroidissement rapide affirme que la température de la barquette baisse de 5 % toutes les minutes avec le réglage n° 2.

   Si la baisse est régulière de 5 % par minute, la représentation graphique de $\mathscr{C}_2$ serait une droite ce qui n'est pas le cas ; l'affirmation de l'employé ne correspond pas à la réalité.
4. Dans cette question, on admet que la température de la barquette baisse de 2 % toutes les minutes avec un réglage n° 3 ; baisser de 2 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{2}{100} = 0{,}98$.

   On complète l'algorithme ci-dessous afin que ce dernier permette de déterminer au bout de combien de temps la température de la barquette sera inférieure à +10 °C :

```
N ← 0
T ← 63
Tant que T > 10
Affecter à N la valeur N + 1
Affecter à T la valeur 0,98 × T
Fin Tant que
```

Partie B

Dans toute cette partie, la température de la cellule de refroidissement rapide est réglée à +3 °C (afin que la température de la barquette ne soit jamais inférieure à +3 °C).
Pour le réglage n° 2, la température de la barquette est modélisée par une fonction f, qui, à tout temps t en heures, associe la température $f(t)$ de la barquette en °C.

1. On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = -1{,}2(y-3)$sur $[0\,;\,+\infty[$.
   a. $y' = -1{,}2\left(y-3\right) \iff y' = 1{,}2y+3{,}6 \iff y'+1{,}2y = 3{,}6$ (équation (E)).
   b. Soit (E_0) l'équation différentielle $y'+1{,}2y = 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$; elle est de la forme $ay'+by = 0$ avec $a = 1$ et $b = 1{,}2$. D'après le formulaire, les solutions sont les fonctions de la forme $f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$ où k est une constante réelle.
   Les solutions de l'équation différentielle $y'+1{,}2y = 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$ sont donc les fonctions f définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = k\mathrm{e}^{-1{,}2t}$ où k est une constante réelle.
   c. Soit h la fonction constante $t \longmapsto 3$.
   $h'(t) = 0$ donc $h'(t)+1{,}2h(t) = 0+1{,}2\times 3 = 3{,}6$ donc la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
   On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions f définies sur .$[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = k\mathrm{e}^{-1{,}2t}+3$.
   d. Quand les barquettes ont atteint une température de +63 °C, elles sont placées dans une cellule de refroidissement rapide, ce qui correspond a début du refroidissement, soit $t = 0$.
   Donc $f(0) = 63$ ce qui équivaut à $k\mathrm{e}^{-1{,}2\times 0}+3 = 63$ ou encore à $k = 60$.
   Donc la fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 60\mathrm{e}^{-1{,}2t}+3$.
2. La valeur arrondie à 10^{-2} de $f(2)$ est 8,44.
   Cela signifie qu'au bout de 2 heures, la température est inférieure à 10 °C, donc que le réglage n° 2 satisfait aux conditions de refroidissement requises.
3. On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.
   $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -1{,}2t = -\infty \\ \text{On pose } T = -1{,}2t \\ \displaystyle\lim_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0\end{array}\right\}\text{ donc } \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-1{,}2t} = 0 \text{ donc } \lim_{t\to+\infty} f(t) = 3$$
   Avec le réglage n° 2, la limite de la température sera de 3 °C, ce qui était demandé dans ce protocole.
4. Avec un logiciel de calcul formel, on obtient : $\dfrac{1}{1{,}5-0}\displaystyle\int_0^{1{,}5} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 30{,}8$ (à 10^{-1} près).
   Ce qui signifie que la valeur moyenne de la fonction entre $t = 0$ et $t = 1{,}5$ est d'environ 30,8 ; on peut donc dire la température moyenne pendant la première heure et demie est d'environ 30,8 °C.
5. Pour le réglage n° 1, la température de la barquette est modélisée par une fonction g, qui, à tout temps t en heures, associe la température $g(t)$ de la barquette en °C. On admet que la courbe $\mathscr{C}_1$ est la représentation graphique de cette fonction g.
   On s'inspire de la forme de l'expression de la fonction f pour déterminer une expression de la fonction g ; on cherche donc g sous la forme $g(t) = 60\mathrm{e}^{-at}+3$.
   On a vu que la courbe $\mathscr{C}_2$ passait par le point de coordonnées (1,5 ; 22) donc $g(1{,}5) = 22$.
   On cherche a tel que $g(1{,}5) = 22$:
   $$g(1{,}5) = 22 \iff 60\mathrm{e}^{-1{,}5a}+3 = 22 \iff \mathrm{e}^{-1{,}5a} = \frac{19}{60} \iff -1{,}5a = \ln\left(\frac{19}{60}\right) \iff a = \frac{\ln\left(\frac{19}{60}\right)}{-1{,}5}$$
   donc $a \approx 0{,}77$
   La fonction g est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 60\mathrm{e}^{-0{,}77t}+3$.