

BTS bâtiment 1998

Exercice 1 (8 points) Les deux parties **A** et **B** sont indépendantes.

Une usine adhérente de "l'ADETS" (Association pour le développement du treillis soudé) fabrique en grande série différents types de treillis soudés pour la construction.

Dans les parties **A** et **B** on s'intéresse à la production de deux produits différents.

A - On suppose que la probabilité qu'un "panneau voile" standard de type Z prélevé au hasard dans la production d'une journée soit conforme à la norme AFNOR est 0,97.

On prélève au hasard n panneaux dans la production d'une journée. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage de n panneaux avec remise.

On appelle Y la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de n panneaux, associe le nombre de panneaux non conformes à la norme AFNOR.

1. Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale. En déterminer les paramètres.
2. Dans cette question on prend $n = 10$. Déterminer une valeur approchée, à 10^{-3} près, de la probabilité de chacun des événements suivants :
 E_1 : "Obtenir exactement un panneau non conforme".
 E_2 : "Obtenir au plus deux panneaux non conformes".
3. Dans cette question on prend $n = 120$. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson.
 - (a) Déterminer le paramètre de cette loi de Poisson.
 - (b) A l'aide de cette loi de Poisson déterminer une valeur approchée, à 10^{-3} près, de la probabilité de l'évènement :
 F : "obtenir au plus trois panneaux non conformes".

B - L'usine produit des fils de 6 mètres de long utilisés pour la fabrication de panneaux de treillis soudé de type "903". On mesure le diamètre exprimé en millimètres de chacun des 40 fils d'un échantillon choisi au hasard et avec remise dans la production d'une journée.

On constate que les valeurs approchées arrondies à 10^{-3} près, de la moyenne $\bar{x}$ et de l'écart type s des diamètres pour cet échantillon sont $\bar{x} = 3,512$ et $s = 0,095$.

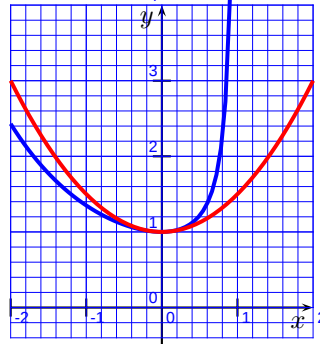
1. Proposer une estimation ponctuelle, à 10^{-3} près, de la moyenne μ et de l'écart type σ du diamètre des fils produits pendant cette journée.
2. Soit $\bar{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille $n = 40$ prélevé au hasard et avec remise, associe la moyenne des diamètres des fils de cet échantillon. On suppose que $\bar{X}$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. On prend pour valeur de σ l'estimation ponctuelle obtenue au 1.
 - (a) Déterminer un intervalle de confiance centré en $\bar{x}$ de la moyenne μ de la population, avec le coefficient de confiance 95 %.
 - (b) Le nombre μ appartient-il à l'intervalle de confiance obtenu au (a) ? Expliquer.
 - (c) Le nombre μ a-t-il plus de chances d'être inférieur à $\bar{x}$ que d'être supérieur à $\bar{x}$? Expliquer.

Exercice 2 (12 points) Les deux parties **A** et **B** sont indépendantes.

A - Etude de quelques propriétés d'une fonction et détermination d'une valeur approchée d'une aire.

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 1[$ par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; l'unité graphique est 2 cm. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée par le dessin suivant :



1. (a) Déterminer, par le calcul, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
- (b) Déterminer, par le calcul, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(On pourra remarquer que, pour tout x de $]-\infty; 1[$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{-x} \times \frac{x}{1-x}$).

2. Déterminer par le calcul l'abscisse du point où la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
3. (a) Démontrer que le développement limité à l'ordre 3 de la fonction f au voisinage de 0 est

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

- (b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$

La courbe Γ , représentative de g , est donnée sur la figure.

Déduire du (a) la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Γ au voisinage du point d'abscisse 0.

4. (a) On note I l'intégrale $\int_0^{1/2} \frac{e^{-x}}{1-x} dx$. Donner une interprétation graphique de I .

(On ne cherchera pas à calculer I).

- (b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $J = \int_0^{1/2} g(x) dx$

Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} près du résultat.

- (c) Les courbes $\mathcal{C}$ et Γ étant "voisines" l'une de l'autre sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on admet que le résultat obtenu au (b) est une valeur approchée de l'intégrale I du (a).
En déduire une valeur approchée en cm^2 de l'aire de la partie du plan ensemble des points M de coordonnées (x, y) telles que $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ et $0 \leq y \leq f(x)$

B - Résolution d'une équation différentielle

Soit (E) l'équation différentielle $(1-x)y' - xy = e^{-x}$, où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur $]-\infty; 1[$ et où y' est la fonction dérivée de y .

1. On note (E_1) l'équation différentielle $(1-x)y' - xy = 0$.
Vérifier que la fonction f de la partie A est solution de (E_1) .
2. On admet que toutes les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont définies sur $]-\infty; 1[$ par $g(x) = K \frac{e^{-x}}{1-x}$ où K est une constante réelle quelconque.
Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E) par la méthode de la variation de la constante.
3. Déduire du 2. l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .