BTS Bâtiment 1993

Exercice 1 (8 points) *Etude de l'absentéisme dans une entreprise du bâtiment.*

Dans cet exercice chaque probabilité demandée sera calculée à 10^{-3} près.
Une agence d'une entreprise du bâtiment emploie vingt personnes. Une étude statistique permet d'admettre qu'un jour donné la probabilité qu'un employé donné soit absent est 0,05. On admet que les absences des employés survenues un jour donné sont indépendantes les unes des autres.
On note X la variable aléatoire qui à chaque jour associe le nombre d'employés absents.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) E_1 : « un jour donné il y a exactement trois absents ».
   (b) E_2 : « un jour donné il y a strictement plus de deux absents ».
   (c) E_3 : « un jour donné le nombre d'absents est compris entre trois et six (bornes comprises) »
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X. Que représente $E(X)$?
4. On approche la loi binomiale du **1.** par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ où n et p sont les paramètres de cette loi binomiale.
   En utilisant la loi de Poisson, déterminer les probabilités respectives des trois événements $E_1,\ E_2,\ E_3$ de la question **2.**
   Vérifier que les résultats obtenus au **4.** différent de moins de 1 % des résultats obtenus au **2.**

Exercice 2 (12 points) Le plan muni du repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ où les unités graphiques sont 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Le plan muni du repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ où les unités graphiques sont 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

A - Résolution d'une équation différentielle
On considère l'équation différentielle : $y'' + 2y + y = 0$ où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' la fonction dérivée seconde de y.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Déterminer la solution de cette équation qui vérifie les deux conditions suivantes :
   (a) la courbe représentative de cette solution passe par le point I de coordonnées $(0; -2)$.
   (b) la tangente à cette courbe au point I a pour coefficient directeur 1.

B - Etude des variations d'une fonction et construction de sa courbe représentative.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-x-2)\,e^{-x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
   En déduire l'existence d'une asymptote pour $\mathcal{C}$ dont on donnera une équation.
   (b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
2. Construire la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

C - Calcul d'une intégrale
Soit $J = \displaystyle\int_{-2}^{0} (-x-2)\,e^{-x}\,dx$

1. (a) Calculer l'intégrale J à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de J.
2. Donner une interprétation graphique de J.