BTS 1997

Exercice 1 Les deux parties A et B sont indépendantes.

Une machine fabrique en grande série des tuyaux de diamètre nominal 100 mm.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tuyau tiré au hasard dans la production, associe son diamètre, exprimé en millimètres.
On admet que X suit la loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma = 0,8$.
A - Dans les questions **A1.** et **A2.** on suppose $m = 100$.
Un tuyau est jugé conforme si son diamètre appartient à l'intervalle [98,5 ; 101,5].

1. On prélève au hasard un tuyau dans la production d'une journée. Déterminer à 10^{-3} près, la probabilité que le tuyau soit jugé non conforme.

2. On suppose maintenant que la probabilité qu'un tuyau prélevé au hasard dans la production d'une journée soit non conforme est 0,06.
On prélève au hasard n tuyaux. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage de n tuyaux avec remise. On appelle Y la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de n tuyaux, associe le nombre de tuyaux non conformes.

   (a) Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale. En déterminer les paramètres.

   (b) Dans cette question on prend $n = 9$. Déterminer une valeur décimale approchée, à 10^{-3} près, de la probabilité de l'événement suivant :
   E : "Obtenir exactement un tuyau non conforme".

   (c) Dans cette question on prend $n = 50$. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson. Quel est le paramètre de cette loi ? A l'aide de cette loi de Poisson déterminer une valeur approchée, à 10^{-2} près, de la probabilité d'avoir au moins quatre tuyaux non conformes.

B - Afin de contrôler que la moyenne m des diamètres de l'ensemble des tuyaux fabriqués est 100, on se propose de construire un test d'hypothèse.
On désigne par $\bar{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 tuyaux, associe la moyenne des diamètres des 100 tuyaux (la production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages de 100 tuyaux avec remise).
L'hypothèse nulle est $H_0 : m = 100$; l'hypothèse alternative est $H_1 : m \neq 100$.
Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1. Justifier que, sous l'hypothèse nulle H_0, la variable aléatoire $\bar{X}$ suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type 0,08.
Déterminer, à 10^{-4} près, le réel positif h tel que :
$$P\left(100 - h \leq \bar{X} \leq 100 + h\right) = 0,95$$

2. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

3. La moyenne observée sur un échantillon de 100 tuyaux est $\bar{x} = 99,73$ mm.
Cet échantillon est assimilé à un échantillon de 100 tuyaux prélevés au hasard et avec remise.
Accepte-t-on au seuil de risque de 5 %, l'hypothèse d'une moyenne de 100 mm ?

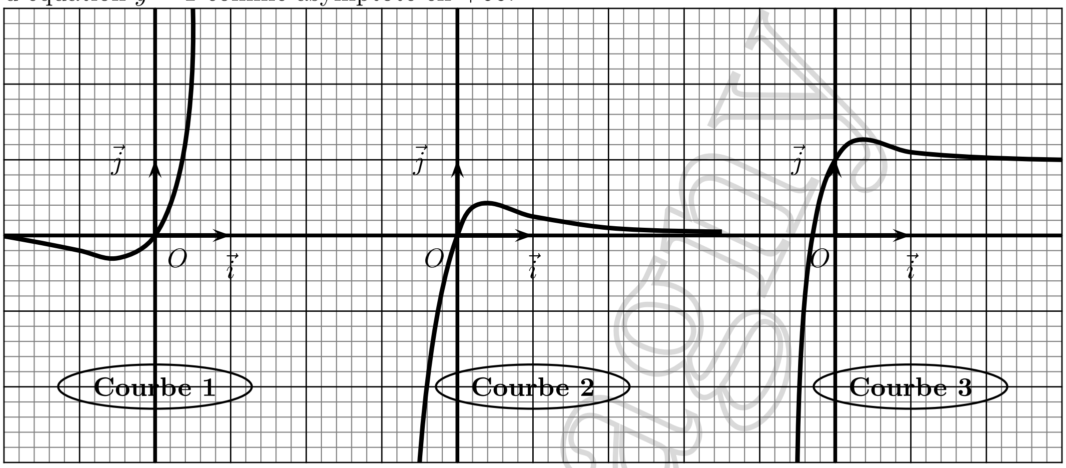
Exercice 2 Les deux parties A et B sont indépendantes.

A - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2xe^{-2x}$.
On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, unité graphique 1 cm.

1. (a) Déterminer $f(0)$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

   (c) On donne sur le dessin suivant les courbes représentatives respectives C_1, C_2, C_3 de trois fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}$. On précise que C_1 admet l'axe des abscisses comme asymptote en $-\infty$, que C_2 admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$ et que C_3 admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote en $+\infty$.



   On admet que f est l'une des trois fonctions f_1, f_2 ou f_3. Laquelle de ces trois fonctions est la fonction f ? Justifier votre choix.

2. Déterminer par le calcul l'abscisse du point où la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

3. (a) Écrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de 0.

   (b) En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0, et la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de ce point.

4. (a) Déterminer à l'aide d'une intégration par parties la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\ dx$

   (b) Déterminer l'aire en cm^2, à 10^{-3} près par défaut, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

B - Soit E_1 l'équation différentielle : $4y'' + 5y' + y = 0$, où y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' et y'' les fonctions dérivée première et dérivée seconde de y.

1. Résoudre l'équation différentielle E_1.

2. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2xe^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle E_2 : $4y'' + 5y' + y = 2e^{-2x}(7x - 11)$.

3. Déduire du 1° et du 2° l'ensemble des solutions de l'équation différentielle E_2.