

BTS Bâtiment 1996

Exercice 1 Les parties A et B sont indépendantes.

Une entreprise fabrique des rivets de différents types pour la construction : des "C 8.25", des "R 8.25".

Partie A

Pour les rivets de type "C 8.25" deux défauts de fabrication seulement sont possibles : un défaut de diamètre et un défaut de longueur.

Une étude statistique permet d'admettre que, pour un rivet choisi au hasard dans la production d'une journée, la probabilité de l'événement A : "le rivet possède un défaut de diamètre" est $P(A) = 0,02$ et la probabilité de l'événement B : "le rivet possède un défaut de longueur" est $P(B) = 0,03$.

On admet que les événements A et B sont indépendants.

Calculer, à 10^{-4} près, la probabilité de chacun des événements suivants :

- E_1 : "le rivet possède les deux défauts".
- E_2 : "le rivet possède au moins un défaut".
- E_3 : "le rivet ne possède aucun des deux défauts".

Partie B

Les rivets de type "R 8.25" sont expédiés par deux succursales S_1 et S_2 .

On désigne par Y_1 la variable aléatoire qui, à un jour choisi au hasard parmi les jours ouvrables de 1995, associe la quantité de rivets, exprimée en kilogrammes, expédiée par la succursale S_1 .

On désigne par Y_2 la variable aléatoire qui, à ce même jour, associe la quantité de rivets, exprimée en kilogrammes, expédiée par la succursale S_2 .

Une étude statistique antérieure permet d'admettre que la variable Y_1 suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart type 3 et que la variable Y_2 suit la loi normale de moyenne 55 et d'écart type 4.

On suppose que Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires indépendantes.

1. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité de chacun des deux événements suivants :

A : " $50 \leq Y_1 \leq 55$ ".

B : "Un jour ouvrable de 1995 choisi au hasard, on a expédié entre 50 kg et 55 kg de rivets de type "R 8.25" à partir de la succursale S_2 ".

2. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à un jour choisi au hasard parmi les jours ouvrables de 1995, associe la somme des quantités expédiées par les deux succursales S_1 et S_2 .

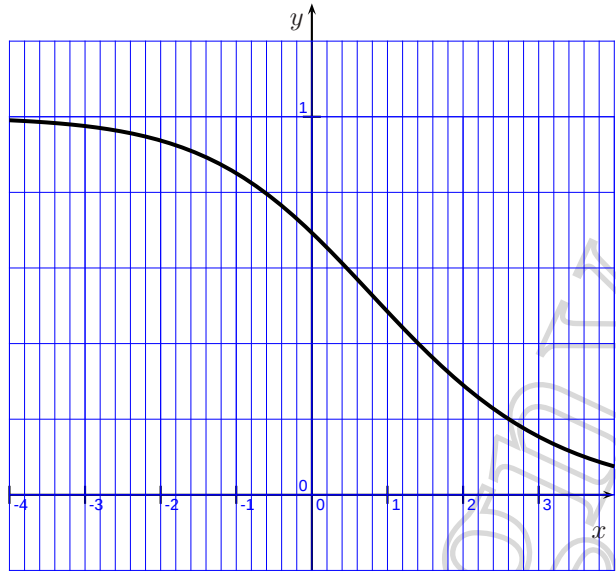
On a $Y = Y_1 + Y_2$ et on admet que Y suit une loi normale.

- (a) Vérifier que la loi normale suivie par Y a pour moyenne 105 et pour écart type 5.
- (b) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement C : " $100 \leq Y \leq 110$ ".

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; les unités graphiques étant 1 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

La courbe $\mathcal{C}$ est donnée par le dessin suivant :



Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	1	0

Les parties A, B, C sont indépendantes.

Partie A

- Déduire du tableau de variation de la fonction f l'existence d'asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$; donner les équations de ces asymptotes.
- (a) Démontrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une seule solution dans $[0; 2]$, que l'on notera α .
(b) Déterminer avec une calculatrice la valeur décimale arrondie à 10^{-3} près de α .

Partie B

- (a) Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \ln(1+e^x)$
(b) Vérifier que pour tout nombre réel x , $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$
(c) Déduire du (a) et du (b) la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$
- (a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ à l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu au (c) du 1.
(b) En déduire l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}$.
On donnera la valeur exacte du résultat puis une valeur approchée au mm^2 près.

Partie C

Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et où y' est la fonction dérivée de y .

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_1) : y' + y = 0$.
- Vérifier que la fonction f définie au début de l'exercice est solution de l'équation (E) .
- Déduire du 1. et du 2. l'ensemble des solutions de l'équation (E) .