

BTS Batiment 1995

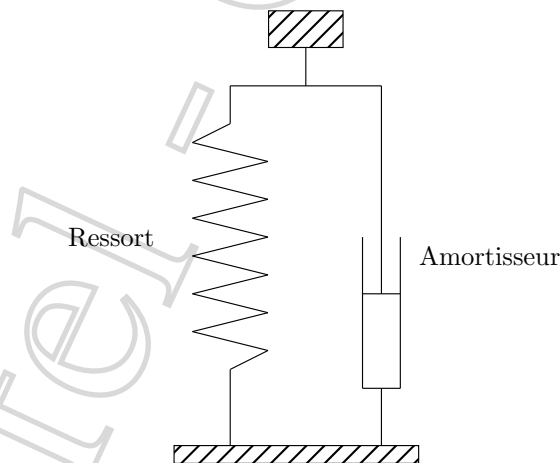
Exercice 1 (8 points) Une machine produit des pièces cylindriques destinées à faire des axes de moteurs. On étudie le diamètre, exprimé en millimètres, des pièces issues de cette fabrication.

Les deux questions (1) et (2) sont indépendantes.

Toutes les probabilités seront calculées à 10^{-3} près.

1. On admet que la variable aléatoire X qui, à toute pièce choisie au hasard dans la production d'une journée, associe son diamètre, suit la loi normale de moyenne $m = 16,5$ et d'écart type $\sigma = 0,1$.
 - (a) Déterminer la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[16,4; 16,6]$.
 - (b) Déterminer le nombre réel positif h , tel que la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[16,5 - h; 16,5 + h]$ soit égale à 0,95.
2. On suppose maintenant que la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est $p = 0,05$. On prélève au hasard 60 pièces. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 60 pièces. On appelle Y la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 60 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses.
 - (a) Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
 - (b) Calculer $P(Y \leq 2)$.
 - (c) On approche la loi binomiale de la question précédente par une loi de Poisson. Préciser le paramètre de cette loi. En utilisant cette loi de Poisson, déterminer la probabilité qu'un échantillon de 60 pièces contienne au plus deux pièces défectueuses.

Exercice 2 (12 points) Une masse M est posée sur le sol à l'aide d'une suspension amortie comme le montre le schéma suivant :



Pour tout t de $[0; +\infty[$, on désigne par $x(t)$ la longueur du ressort.

On établit en mécanique que la fonction de la variable t définie sur $[0; +\infty[$ par $t \mapsto x(t)$ est solution de l'équation différentielle : $x'' + kx' + 25x = 20$ où k désigne une constante réelle positive qui dépend des caractéristiques de l'amortisseur.

A - Les questions (1) et (2) sont dans une large mesure indépendantes.

1. Résolution de l'équation différentielle (1) : $x'' + kx' + 25x = 0$ où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$ et k une constante réelle positive.
 - (a) Écrire l'équation caractéristique de l'équation (1).

- (b) Donner suivant les différentes valeurs de k les différentes formes des solutions.
- (c) Déterminer l'intervalle dans lequel il faut choisir le nombre k pour que l'équation (1) n'admette pas de solution faisant intervenir des fonctions trigonométriques, donc que le système ne soit pas soumis à des oscillations.
2. Dans la suite on prend $k = 10$.
On note (2) l'équation différentielle : $x'' + 10x' + 25x = 20$ où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$.
- (a) Résoudre l'équation différentielle (3) : $x'' + 10x' + 25x = 0$.
- (b) Déterminer le nombre réel m pour que la fonction constante h définie sur $[0; +\infty[$ par $h(t) = m$ soit solution de l'équation (2).
- (c) Dédire de ce qui précède l'ensemble des solutions de l'équation (2).
- (d) Déterminer la solution particulière x de l'équation (2) qui vérifie les conditions initiales

$$x(0) = 0,4 \text{ et } x'(0) = 0$$

B - Soit x la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $x(t) = (-2t - 0,4)e^{-5t} + 0,8$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 10 cm.

- (a) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$. En déduire l'existence d'une asymptote $\mathcal{D}$ dont on donnera une équation.

(b) En admettant que la fonction x que l'on étudie soit solution du problème mécanique décrit au début de cet exercice, donner une interprétation du résultat obtenu au B - 1. (a).
- (a) Déterminer la dérivée x' de x .

(b) Établir le tableau de variation de x .
- (a) Déterminer la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

(b) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel on fera figurer éventuellement des valeurs décimales approchées à 10^{-3} près.

t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2
$x(t)$							

- (c) Construire $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$.