1995

DCJ 1

Durée : 2 H 00

Coefficient : 1

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des instruments de calcul et du formulaire de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1. 7 points

Une usine fabrique en grande série des pièces susceptibles de présenter un défaut A dans 3% des cas, ou un défaut B dans 7% des cas. L'apparition d'un défaut est indépendante de l'apparition de l'autre.

1°) Calculer la probabilité qu'une pièce tirée au hasard :

- a- présente les deux défauts ;
- b- présente au moins l'un des deux défauts ;
- c- présente un seul défaut;
- d- ne présente aucun défaut.

2°) On prélève au hasard 250 pièces dans la production.

Soit X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 250 pièces, fait correspondre le nombre de pièces présentant le défaut A.

a- Quelle est la loi de probabilité de X ?

b- On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson. En déterminer le paramètre λ . Calculer alors la probabilité que, parmi les 250 pièces, il y en ait au plus 3 présentant le défaut A.

3°) Soit Y la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 250 pièces, fait correspondre le nombre de pièces présentant le défaut B. On admet que la loi de Y peut être approchée par une loi normale de paramètres $m = 17,5$ et $\sigma = 4,03$.

a- Justifier les valeurs de m et σ .

b- Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 20 pièces présentant le défaut B.

c- Calculer la probabilité de l'événement : $15 \leq Y \leq 20$.

EXERCICE 2. 13 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est paire} \\ f \text{ est périodique de période } 4 \\ f(t) = 1 \text{ pour } 0 \leq t < 1 \\ f(t) = 2-t \text{ pour } 1 \leq t \leq 2. \end{array} \right.$$

A. 1°) Représenter graphiquement f pour t appartenant à l'intervalle $[-6, 6]$.

2°) La fonction f satisfaisant aux conditions de Dirichlet et étant de plus continue sur $\mathbb{R}$, on a :

$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$, où a_0 , a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier associée à f .

a- Justifier que $b_n = 0$ pour $n \geq 1$.

b- Calculer a_0 et ω .

c- Montrer que pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{4}{\pi^2 n^2} (\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi)$

En déduire les valeurs de a_1 , a_2 , a_3 et a_4 .

B. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) - \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi t)$$

1°) Montrer que φ est paire et périodique de période 4.

2°) a- Calculer $\varphi'(t)$ pour tout réel t et vérifier que :

$$\varphi'(t) = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right) \cos\left(\frac{3\pi t}{4}\right)$$

b- En déduire le sens de variation de φ sur $[0, 2]$.

3°) Construire dans un plan rapporté à un repère orthonormal, les courbes représentatives de f et de φ pour t appartenant à $[-2, 2]$.
(Unité graphique : 4 cm)