CCLM1

Durée : 2 heures

Coefficient : 1

SESSION 1994

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

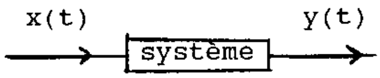
EXERCICE 1 : (13 POINTS)

La fonction de transfert H d'un système est définie par :

$$H(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 2}$$

On considère le signal d'entrée x défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) = 0 \text{ , si } t < 0 \\ x(t) = 5\sin t \text{ , si } t \geqslant 0. \end{cases}$$



Le signal de sortie y du système soumis au signal d'entrée x est tel que :

$$Y(p) = H(p).\ X(p)$$

où X et Y sont les transformées de Laplace respectives des fonctions numériques x et y de la variable réelle t :

$$X(p) = \mathcal{L}(x(t)) \text{ et } Y(p) = \mathcal{L}(y(t)).$$

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

A. On se propose de déterminer le signal de sortie y.

1° Déterminer X(p) et Y(p).

2° Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout réel p, on ait :

$$\frac{5p}{(p^2 + 1)(p^2 + 2p + 2)} = \frac{ap + b}{p^2 + 1} + \frac{cp + d}{(p + 1)^2 + 1} .$$

3° a) Calculer les originaux respectifs de :

$$\frac{p}{p^2 + 1} , \frac{1}{p^2 + 1} , \frac{p + 1}{(p + 1)^2 + 1} \text{ et } \frac{1}{(p + 1)^2 + 1} .$$

b) En déduire l'expression de y(t) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $[0, +\infty[$.

B. Soit $\mathcal{P}$ le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(0; \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique 10 cm). On note A le point d'affixe 1.

On désigne par j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On se propose de rechercher le lieu (C) des points M du plan $\mathcal{P}$, d'affixes $Z = H(j\omega)$ lorsque le réel ω décrit l'intervalle $]0, +\infty[$.

1° Montrer que, pour tout réel ω strictement positif,

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + jr(\omega)} ,$$

où r est la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$r(\omega) = \frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega} .$$

2° Etudier les variations de la fonction r (on ne demande pas le tracé de la courbe représentative de r).

3° a) Quel est le lieu (E_1) des points m_1, du plan $\mathcal{P}$, d'affixes $Z_1 = 1 + jr(\omega)$ lorsque ω décrit l'intervalle $]0, +\infty[$?

b) Quel est le lieu (E_2) des points m_2, du plan $\mathcal{P}$, d'affixes $Z_2 = \frac{1}{1 + jr(\omega)}$ lorsque ω décrit l'intervalle $]0, +\infty[$?

(On précisera la transformation utilisée).

c) Quel est le lieu (C) des points M, du plan $\mathcal{P}$, d'affixes Z = H(jω) lorsque ω décrit l'intervalle]0, + ∞[?

(On précisera la transformation utilisée).

d) Tracer, sur une même figure, les ensembles (E_1), (E_2) et (C).

EXERCICE 2 : (7 POINTS)

Soit la fonction numérique f de la variable réelle t telle que :

a) f est impaire et de période 2π,
b) f(t) = 1 - cos(2t), si $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

1°) Etudier les variations de f sur [0, π].

Tracer, dans un plan muni d'un repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm), la courbe représentative de f sur [- 2π, 2π].

2°) Calculer la valeur efficace, E_f, de la fonction f.

3°) On admet que, pour tout réel t,

$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$, les nombres a_0, a_n et b_n étant les coefficients de Fourier de f.

a) Justifier que : $a_n = 0$, pour $n \geqslant 0$.

b) Calculer ω et b_2 .
c) Calculer b_n pour $n \geqslant 1$, $n \neq 2$.

(On précisera le résultat suivant la parité de n).