La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1 (11 points) :

On se propose de résoudre, à l'aide de la transformation de Laplace, le système différentiel suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + x - 2y = v \\[2mm] \dfrac{dx}{dt} - 2\dfrac{dy}{dt} + 5x - 10y = 0 \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions numériques de la variable réelle t définies sur $\mathbb{R}$ et telles que

$$\begin{cases} x(t) = 0 \quad \text{et} \quad y(t) = 0 \quad \text{si } t < 0, \\ x(0) = 0 \quad \text{et} \quad y(0) = 0, \end{cases}$$

et où v est la fonction de la variable réelle t définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} v(t) = 0 \text{ si } t < 0 \quad \text{ou } t \geqslant \dfrac{\pi}{2} \\[2mm] v(t) = 8\sin(2t) \quad \text{si } 0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

A. Détermination de la transformée de Laplace de v.

Soit les fonctions numériques g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = 8\sin(2t)\,\mathcal{U}(t)$$

$$h(t) = g\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$$

On rappelle que la fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 \quad \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 \quad \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

1. Déterminer les transformées de Laplace des fonctions g et h.

2. Tracer les courbes représentatives C_g, C_h et C_v des fonctions g, h et v sur $[-\pi, 2\pi]$.

(Les courbes C_g et C_h seront tracées dans un même repère en utilisant des couleurs différentes ; la courbe C_v sera tracée dans un autre repère ; on prendra toutefois les mêmes unités graphiques pour les deux repères).

En déduire v(t) à l'aide de g(t) et h(t).

3. Utiliser les résultats précédents pour déterminer la transformée de Laplace $V(p) = \mathcal{L}(v(t))$ de v.

B. Résolution du système (S).

On admet que les fonctions x et y et leurs dérivées ont des transformées de Laplace et l'on note :
$X(p) = \mathcal{L}(x(t))$ et $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$.

1. A partir de (S), écrire le système vérifié par X(p) et Y(p).
Déterminer X(p) et Y(p).

2. Déterminer les réels a, b, et c tels que, pour tout réel p non nul, on ait :

$$\frac{4}{p(p^2+4)} = \frac{a}{p} + \frac{bp+c}{p^2+4}.$$

En déduire les originaux respectifs de $\dfrac{4}{p(p^2+4)}$ et

$$\frac{4}{p(p^2+4)}e^{-\frac{\pi}{2}p}$$

Déterminer les expressions de x(t) et de y(t) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$

EXERCICE II (9 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

A. Une collectivité utilise des machines de type M.
On a observé que, au cours d'un mois de service, une machine de ce type :
- soit, ne tombe pas en panne,
- soit, tombe en panne une fois et une seule avec la probabilité $p = 0,04$.

On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de machines de type M qui tombent en panne au cours d'un mois de service.

1° Soit N le nombre de machines de type M utilisées par la collectivité. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Donner l'expression de $P(X = k)$ en fonction de N et k, (k entier naturel, $0 \leqslant k \leqslant N$). Calculer l'espérance et la variance de X.

2° On suppose, dans cette question, que N = 100 et que la loi de probabilité de X peut être approchée par une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre λ. Calculer, dans ces conditions, la probabilité que, au cours d'un mois de service, au moins cinq machines tombent en panne.

B. Soit Y la variable aléatoire mesurant la durée de vie, en années , d'une machine de type M. On suppose que Y suit la loi normale de moyenne $m = 12$ et d'écart-type $\sigma = 1,5$.

1°. Calculer la probabilité p' qu'une machine ait une durée de vie d'au moins 14 ans.

2°. Dans cette question, on prend $p' = 0,09$ (on rappelle que p' est la probabilité qu'une machine ait une durée de vie d'au moins 14 ans).

Une collectivité utilise 1 000 machines de type M. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 100 de ces machines dont la durée de vie soit supérieure à 14 ans ? (On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire Z, prenant pour valeur le nombre de machines dont la durée de vie est supérieure à 14 ans, peut être approchée par une loi normale dont on déterminera les paramètres).