

Epreuve : MATHEMATIQUES

Durée : 2 h 00

Coefficient : 1

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1 (12 points)

Soit un signal électrique défini par la fonction f telle que :

$$\begin{cases} f \text{ est paire et de période } 2\pi \\ f(t) = -t^2 + 2\pi t \text{ si } t \in [0, \pi] \end{cases}$$

1°) Représenter le signal électrique pour $t \in [-3\pi, 3\pi]$.

Calculer $\int_0^\pi f(t) dt$. En déduire la valeur moyenne de f sur une période.

2°) On admet que la fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet, ce qui permet d'affirmer que la fonction f est la somme de sa série de Fourier, à savoir : pour tout t élément de $\mathbf{R}$,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

les nombres a_0 , a_n et b_n étant les coefficients de Fourier de f .

a) Calculer a_0 .

b) Calculer les intégrales suivantes où n est un entier strictement positif :

$$I_n = \int_0^\pi t \cdot \cos nt \, dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^\pi t^2 \cdot \cos nt \, dt$$

Exprimer le coefficient a_n à l'aide de I_n et J_n . En déduire a_n .

3°) En utilisant le développement de $f(t)$ pour $t = 0$, déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

EXERCICE 2 (8 points)

Les questions I et II sont indépendantes. Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

Une machine fabrique des pièces de forme circulaire en série. A chaque pièce tirée au hasard, on associe son diamètre exprimé en millimètres. On définit ainsi une variable aléatoire X . On suppose que X suit la loi normale de moyenne $m = 32$ et d'écart-type $\sigma = 1$ (en mm).

I - Pour être utilisable, une pièce doit satisfaire à la norme suivante : $31 \leq X \leq 33$.

1°) Quelle est la probabilité p qu'une pièce soit utilisable ?

2°) Prix de revient moyen de fabrication.

Le coût de fabrication d'une pièce est noté f . Dans un lot de 100 pièces fabriquées dont le coût de fabrication est donc $100f$, $100p$ seulement d'entre-elles sont utilisables ; il en résulte que le prix

moyen M de fabrication est $M = \frac{100f}{100p} = \frac{f}{p}$.

a) Calculer le prix moyen de fabrication avec la machine précédente si $f = 10,80$ F.

Pour diminuer le pourcentage de pièces défectueuses, on pourrait utiliser une machine plus moderne : l'écart type serait de 0,5 mm et X suivrait alors une loi normale $N(32 ; 0,5)$, mais le coût de fabrication f_2 serait alors de 12 F pour cette nouvelle machine.

b) Calculer, pour cette nouvelle machine, la probabilité p_2 pour qu'une pièce soit utilisable.

c) Déterminer le prix de revient moyen M_2 de fabrication pour cette nouvelle machine. En déduire la machine que l'on aurait intérêt à choisir.

II - Pour cette question, les pièces sont fabriquées avec l'ancienne machine.

Pour contrôler la fabrication, on prélève à intervalles réguliers des échantillons de 20 pièces.

On appelle $\bar{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de $n = 20$ pièces, associe la moyenne des diamètres des pièces de cet échantillon. On suppose que cette variable aléatoire $\bar{X}$ suit alors la loi normale de moyenne $m = 32$ et d'écart-type $\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$.

Entre quelles limites $m - h$ et $m + h$ doit être située $\bar{X}$ pour que la machine puisse être considérée comme bien réglée avec une probabilité de 0,99 ?