

Correction Mathématique BTS 2006 Groupement A 2

Exercice 1

Partie A

1/ Calcul de la probabilité E1 : « l'appareille présente le défaut a et le défaut b »

$$P(E1)=P(A \cap B)=P(A) \times P(B)=0.03 \times 0.02=0.0006$$

2/ Calcul de la probabilité E2 : « l'appareille est défectueux (au moins un des deux défauts) »

$$P(E2)=P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=0.03+0.02-0.0006=0.0494$$

3/ Calcul de la probabilité E3 : « l'appareille ne présente aucun défauts »

$$P(E3)=1-P(A \cup B)=1-0.0494$$

4/ Calcul de la probabilité E4 : « l'appareille présente les deux défauts sachant qu'il est défectueux »

$$P(E4) = (A \text{ faire !})$$

Partie B

1/

Soit X_1 la V.A. qui a tout prélèvement de 100 appareils, associe le nombre d'appareil défectueux.

Considérons l'expérience qui consiste à prélever une pièce de l'échantillon de 100 appareils. Cette expérience conduit soit à un « succès » si la pièce est défectueuse avec une probabilité de $p=5\%$ ou bien à un échec si la pièce est bonne avec la probabilité $q=1-p=95\%$. Le tirage d'un appareil avec remise est donc une suite de n épreuves avec n fixé à l'avance et les n épreuves étant indépendantes.

Les considérations précédentes permettent de déduire que X_1 suit une loi Binomiale de paramètre $n=100$ et $p=0.05$

$$X_1 \longrightarrow B(n=100, p=0.05)$$

2/ Espérance de la variable aléatoire X_1

$$E(X_1)=n \times p=100 \times 0.05=5$$

3/ On approche la loi de X_1 par une loi de Poisson de paramètre λ

a - On sait que pour la loi de Poisson, l'espérance est donnée par $E(X)=\lambda$.

Par conséquent, $\lambda=E(X_1)=5$

b - La probabilité d'avoir au plus deux appareils défectueux est donné par $P(X_1 \leq 2)$.

$$P(X_1 \leq 2) = P(X_1=0) + P(X_1=1) + P(X_1=2) = 0.007 + 0.034 + 0.084 = 0.125$$

Partie C

1/ $X_2 \rightarrow N(m=40, \sigma=6.2)$

On cherche la probabilité qu'il y ait au plus 50 appareils défectueux dans le lot de 800 appareils, soit $P(X_2 \leq 50)$.

On se ramène à une loi normale $N(0,1)$ avec la variable aléatoire centrée réduite $T = \frac{X - m}{\sigma}$

$$P(X_2 \leq 50) = P\left(T \leq \frac{50 - 40}{6.2} = 1.61\right) = \Phi(1.61) = 0.9463$$

2/ On recherche x tel que $P(X_2 > x) = 0.01$

$$P(X_2 > x) = P\left(T > \frac{x - 40}{6.2}\right) = 0.01$$

$$\text{or } P\left(T \leq \frac{x - 40}{6.2}\right) = 1 - 0.01 = 0.99 = \Phi(2.33)$$

$$\text{par conséquent } \frac{x - 40}{6.2} = 2.33 \text{ et } x = 2.33 \times 6.2 + 40 = 54.45$$

on donne donc $k=54$ (a vérifié si c est pas $k=55$)

Exercice 2

Partie A

1/ Calcul de la a_0

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \int_0^1 (\alpha t + \beta) dt = \left[\frac{\alpha}{2} t^2 + \beta t \right]_0^1 = \frac{\alpha}{2} + \beta$$

3/ Calcul de la b_n

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt = \int_0^1 (\alpha t + \beta) \sin(n\omega t) dt$$

on pose, $u(t) = \alpha t + \beta$ soit $u'(t) = \alpha$

et $v'(t) = \sin(n\omega t)$ soit $v(t) = -\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}$

$$b_n = \frac{2}{T} \left[-(\alpha t + \beta) \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^T + \frac{2}{T} \int_0^T \alpha \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} dt \quad \text{on note que } \omega T = 2\pi$$

$$b_n = -2 \left[(\alpha T + \beta) \frac{\cos(n2\pi)}{n2\pi} - \beta \right]_0^T + -2 \left[\alpha \frac{\sin(n\omega t)}{(n\omega)^2} \right]_0^T$$

$$b_n = - \left[(\alpha T + \beta) \frac{\cos(n2\pi)}{n\pi} - \beta \right]_0^T + - \frac{2}{T} \left[\alpha \frac{\sin(n\omega t)}{(n\omega)^2} \right]_0^T = - \frac{\alpha T + \beta - \beta}{n\pi} = - \frac{\alpha T}{n\pi}$$

$\searrow$
 $= 0$

$$b_n = - \frac{\alpha}{n\pi}$$

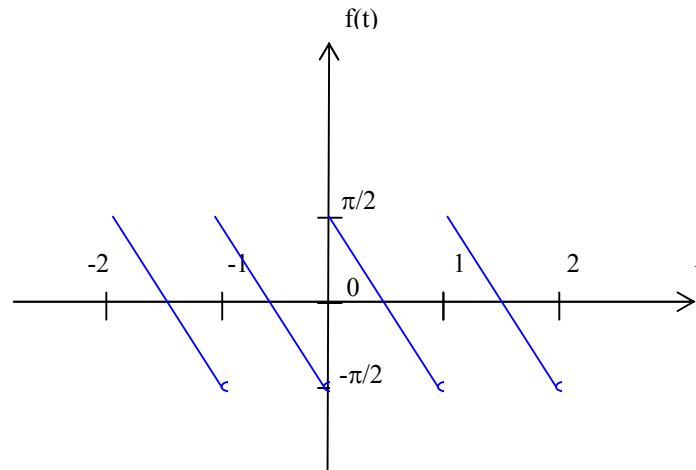
3/

a- On a : $a_0=0$ et $b_n=1/n$

$$\text{soit } \frac{1}{n} = - \frac{\alpha}{n\pi} \text{ donc } \alpha = -\pi \text{ et } \beta = -\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et } f(t) = -\pi t + \frac{\pi}{2}$$

b-



Partie B

1/ $s''(t) + s(t) = f(t)$ (E)

on vérifie que $s_1(t) = \frac{1}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t)$ est bien solution de (E)

$$s_1''(t) = \frac{-4\pi^2}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) + \frac{-16\pi^2}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t)$$

$$s_1''(t) + s_1(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(4\pi t) = f(t)$$

2/

On recherche la solution de l'équation $s''(t) + s(t) = 0$, pour cela on détermine le réel r tel que $r^2 + 1 = 0$

Soit $r = \pm i$

Par conséquent la solution générale de (E) est $s_2(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t)$

$$\text{Et } s(t) = s_1(t) + s_2(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) + \frac{1}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t)$$