BTS - groupement B - 2000

Correction de l'épreuve de Mathématiques

EXERCICE I

1. D suit une loi normale.

Si D suit la loi normale $\mathcal{N}(25,50; 0,1)$ alors la variable T définie par $T = \dfrac{D-25}{0,1}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Il en résulte que:

$$\begin{aligned} p(25,3 \leq D \leq 25,7) &= p\left(\frac{25,3-25,5}{0,1} \leq \frac{D-25,5}{0,1} \leq \frac{25,7-25,5}{0,1}\right) \\ &= p(-2 \leq T \leq 2) \\ &= \pi(2) - \pi(-2) \\ &= 2\pi(2) - 1 \\ &= 2 \times 0,977\,2 - 1 \end{aligned}$$

d'où $p(25,3 \leq D \leq 25,7) = 0,954\,4 \approx 0,96$

2. **a.** X suit une loi binomiale.

Soit l'épreuve: on prélève un boulon et on vérifie le diamètre de la tête

$$\left.\begin{array}{|l} \star\text{on répète 10 fois cette épreuve.} \\ \star\text{les épreuves sont indépendantes.} \\ \star\text{chaque épreuve a 2 issues : conforme avec p=0,96} \\ \quad\text{ou non conforme avec q=0,04} \end{array}\right\} \text{donc } X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(10; 0,96).$$

b. Probabilité d'avoir au plus un boulon non conforme.

On demande donc: $p(X \geq 9)$. soit:

$$\begin{aligned} p(X \geq 9) &= p(X=9) + p(X=10) \\ &= C_{10}^{9}(0,96)^9 \times (0,04)^1 + C_{10}^{10}(0,96)^{10} \end{aligned}$$

d'où $p(X \geq 9) = 0,94$

3. Test d'hypothèse

a. Loi suivie par $\overline{Y}$

D'après le cours, on sait que si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors $\overline{Y}$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Ici, on a $\mu = 10$, $\sigma = 0,1$ avec $n = 100$. Donc $\overline{Y}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(10; 0,01)$.

b. Calcul de h tel que $p\left(10 - h \leq \overline{Y} \leq 10 + h\right) = 0,95$

$\overline{Y}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(10; 0,01)$ donc la variable T définie par $T = \dfrac{\overline{Y}-10}{0,01}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\begin{aligned} p\left(10 - h \leq \overline{Y} \leq 10 + h\right) &= p\left(-\frac{h}{0,01} \leq \overline{T} \leq \frac{h}{0,01}\right) \\ &= 2\pi\left(\frac{h}{0,01}\right) - 1 \end{aligned}$$

On en déduit que:$2\pi\left(\dfrac{h}{0,01}\right) - 1 = 0,95$ soit $\pi\left(\dfrac{h}{0,01}\right) = 0,975$ d'où $\dfrac{h}{0,01} = 1,96$.

Donc $h = 0,0196 \approx 0,02$

Il en résulte que si H_0 est vraie, il y a 95% de chances de prélever un échantillon dont la moyenne appartient à l'intervalle: $[9,98\,; 10,02]$

c. Règle de décision.

On prélève un échantillon aléatoire de 100 boulons, et on calcule la moyenne $\overline{y}$ des diamètres de leurs pieds. Si cette moyenne est dans l'intervalle $[9,98\,; 10,02]$ alors on accepte l'hypothèse H_0, sinon on la refuse.

d. Utilisation du test.

L'échantillon a une moyenne $\overline{y} = 10,03$ qui n'appartient pas à l'intervalle $[9,98\,; 10,02]$. On refuse donc H_0 et on considère au seuil de 5%, que les boulons ne sont pas conformes pour le diamètre de leur pied.

EXERCICE II

A – Résolution d'une équation différentielle

1. Résolution de (E_0): $y'' - 4y = 0$

L'équation caractéristique est: $r^2 - 4 = 0$, qui admet les 2 racines réelles $r_1 = -2.$ et $r_2 = 2$. On en déduit que les solutions de (E_0) sont les fonctions y de la forme: $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$ où A et B sont 2 constantes réelles quelconques

2. $g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$ est une solution particulière de (E)

$g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$ donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{4}{3}e^{-2x} + \frac{4}{3}x(-2e^{-2x}) \\ &= \frac{4}{3}(-2x+1)e^{-2x} \end{aligned} \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{4}{3}(-2)e^{-2x} + \frac{4}{3}(-2x+1)(-2e^{-2x}) \\ &= \frac{16}{3}(x-1)e^{-2x} \end{aligned}$$

On vérifie alors que:

$$\begin{aligned} g''(x) - 4g(x) &= \frac{16}{3}(x-1)e^{-2x} - 4 \times \frac{4}{3}xe^{-2x} \\ &= -\frac{16}{3}e^{-2x} \end{aligned}$$

Ce qui prouve que g est bien solution particulière de (E).

3. Ensemble des solutions de (E).

On obtient la solution générale de (E) en additionnant une solution particulière de (E) et la solution générale de (E_0). Les fonctions y solutions de (E) sont donc de la forme:

$y(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x} + Ae^{2x} + Be^{-2x}$ où A et B sont 2 constantes réelles quelconques

4. Solution particulière h telle que: $h(0) = \frac{4}{3}$ et $h'(0) = -\frac{4}{3}$

$h(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x} + Ae^{2x} + Be^{-2x}$ donc $h'(x) = \frac{4}{3}(-2x+1)e^{-2x} + 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x}$

Il en résulte que: $h(0) = A + B$ et $h'(0) = \frac{4}{3} + 2A - 2B$

Il s'en suit que: $\left| \begin{array}{c} A + B = \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} + 2A - 2B = -\frac{4}{3} \end{array} \right\}$ soit $\left| \begin{array}{c} A + B = \frac{4}{3} \\ A - B = -\frac{4}{3} \end{array} \right\}$ d'où $\left| \begin{array}{c} A = 0 \\ B = \frac{4}{3} \end{array} \right\}$

On en déduit que: $h(x) = \frac{4}{3}(x+1)e^{-2x}$

B – Étude d'une fonction

1. a. Calcul de $f'(x)$

Comme $(1+x)' = 1$ et $\left(e^{-2x}\right)' = -2e^{-2x}$, on en déduit que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4}{3} \times 1 \times e^{-2x} + \frac{4}{3}(x+1)(-2e^{-2x}) \\ &= -\frac{4}{3}(2x+1)e^{-2x} \end{aligned} .$$

b. Sens de variation de f.

e^{-2x} est toujours strictement positive, $-4/3$ est toujours strictement négatif, et $(2x+1)$ est strictement positif pour x positif. $f'(x)$ est donc toujours négative sur $[0, +\infty[$ On en déduit que f est décroissante sur $[0, +\infty[$.

2. Limite de $f$en $+\infty$

$f(x) = \frac{4}{3}(1+x)e^{-2x} = \frac{4}{3}e^{-2x} + \frac{2}{3}2xe^{-2x}$ avec $\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} 2xe^{-2x} = 0$

On a donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et par conséquence une asymptote horizontale d'équation $y = 0$

3. **a.** Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{-2x}$.

On sait que $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^3}{3!} + t^3\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$ donc:

$$\begin{aligned} e^{-2x} &= 1 - 2x + \frac{(-2x)^2}{4} + \frac{(-2x)^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \end{aligned}$$

b. Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f.

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}(1+x)e^{-2x} &= \frac{4}{3}(1+x)\left(1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)\right) \\ &= \frac{4}{3}\left(1 - x + \frac{2}{3}x^3\right) + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

c. Tangente au point d'abscisse 0.

La tangente correspond au développement limité à l'ordre 1 donc: $T \ : y = \dfrac{4}{3}(1-x)$

La position relative de T et C est donné par le signe de la différence $f(x) - \dfrac{4}{3}(1-x)$

Il est immédiat que: $f(x) - \dfrac{4}{3}(1-x) = \dfrac{4}{9}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

Or pour $x \geq 0$ on a $\dfrac{4}{9}x^3 \geq 0$, on en déduit que C est au dessus de T pour x positif au voisinage de 0.

4. **a.** Calcul de $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$

$I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{4}{3}\int_0^3 (1+x)e^{-2x}\,dx$

posons $\left|\begin{array}{l} U = 1 + x \\ V' = e^{-2x} \end{array}\right\}$ alors $\left|\begin{array}{c} U' = 1 \\ V = -\dfrac{e^{-2x}}{2} \end{array}\right\}$

On en déduit que

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\Big[(1+x)e^{-2x}\Big]_0^3 + \frac{1}{2}\int_0^3 e^{-2x}\,dx\right) \\ &= \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\left(4e^{-6} - 1\right) - \frac{1}{4}\Big[e^{-2x}\Big]_0^3\right) \\ &= \frac{4}{3}\left(-2e^{-6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(e^{-6} - 1\right)\right) \\ &= 1 - 3e^{-6} \end{aligned}$$

soit $I = 1 - 3e^{-6} \approx 0,99$

I représente, en unité d'aire, l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 3$.

b. Calcul de $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(-\dfrac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t}$

On a $\left(-\dfrac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t} = -\dfrac{2}{3}te^{-2t} + \dfrac{2}{3}e^{-2t}$

$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{t\to+\infty} -\frac{2}{3}te^{-2t} = 0 \\ \displaystyle\lim_{t\to+\infty} -\frac{2}{3}e^{-2t} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t} = 0$$

c. Calcul de $J = \lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$

$A(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$ donc $A(t) = \left(-\dfrac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t} + 1.$

On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t} = 0$, il en résulte que $J = \lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = 1$

d. Calcul de $J - I$ et interprétation graphique.

On a $I = 1 - 3e^{-6} \approx 0,99$ et $J = 1$ donc $J - I = 3e^{-6} \approx 0,007$

Il est alors immédiat que $0 \leq J - I \leq 10^{-2}$.

$J - I$ représente l'aire de la partie ouverte du plan comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses et située à droite de la droite verticale d'équation $x = 3$.