CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2018

---

# COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

## (Classe terminale S)

DURÉE : 5 HEURES

---

| |
|---|
| La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation.<br>La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. |

*Le sujet comporte trois problèmes indépendants et 7 pages numérotées 1 à 7.*
*Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.*

**PROBLÈME I**

***Approximations de courbes***

## Partie A : Les polynômes de Bernstein

Pour tout entier naturel $n$ et pour tout entier naturel $i$ compris entre 0 et $n$, on note $B_{n,i}$ le polynôme défini pour $p$ variant dans l'intervalle $[0;1]$ par

$$B_{n,i}(p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

avec $\binom{n}{i}$ le coefficient binomial, $i$ parmi $n$. Ainsi $B_{0,0}(p) = 1; B_{1,0}(p) = 1-p$ et $B_{1,1}(p) = p$.
Ces polynômes sont appelés ***polynômes de Bernstein***.

1° (a) Donner l'expression de $B_{2,0}(p)$, $B_{2,1}(p)$ et $B_{2,2}(p)$.

(b) Déterminer l'expression des polynômes de Bernstein pour $n = 3$, à savoir $B_{3,0}(p), B_{3,1}(p), B_{3,2}(p)$ et $B_{3,3}(p)$.

2° (a) Quelle est l'expression de $B_{n,0}(p)$ et de $B_{n,n}(p)$ ?

(b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $i$ compris entre 1 et $n-1$,

$$B_{n,i}(p) = (1-p)B_{n-1,i}(p) + p\,B_{n-1,i-1}(p).$$

3° (a) En quelle(s) valeur(s) $p \in [0;1]$ s'annule un polynôme de Bernstein ?
*On raisonnera en distinguant les cas selon les valeurs de $n$ et de $i$.*

(b) Qu'en est-il de son signe sur $[0;1]$ ?

4° Démontrer que les polynômes de Bernstein d'un même degré $n$ forment une partition de l'unité : c'est-à dire, pour tout entier naturel $n$,

$$\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = B_{n,0}(p) + B_{n,1}(p) + \ldots + B_{n,n-1}(p) + B_{n,n}(p) = 1.$$

5° Déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{i=0}^{n} i B_{n,i}(p) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p).$$

Que représentent ces sommes en termes probabilistes ?

## Partie B : Des courbes de Bézier

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, I, J)$. Soit $n$ un entier naturel. On se donne $n+1$ points non alignés du plan $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$.
On appelle ***courbe de Bézier*** de degré $n$ et de points de contrôle $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$ l'ensemble des points $M(p)$ du plan avec $p$ variant dans l'intervalle $[0;1]$ tels que

$$\overrightarrow{OM(p)} = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) \overrightarrow{OP_i}.$$

Dans la suite on va s'intéresser à des courbes de Bézier de degré 0, 1 ou 2.
On se fixe donc $A$, $B$, $C$ trois points du plan non alignés.

1° Reconnaitre la nature géométrique

   (a) de la courbe de Bézier de degré 0 et de point de contrôle $A$.

   (b) de la courbe de Bézier de degré 1 et de points de contrôle $B$ et $C$.

2° On s'intéresse à la courbe de Bézier de degré 2 et de points de contrôle $A$, $B$ et $C$.

   (a) Justifier que les points $A$ et $C$ appartiennent à cette courbe. Le point $B$ y appartient-il ?

   (b) Dans cette question on prend les points de coordonnées $A(-2;5), B(2;1)$ et $C(4;3)$. Proposer une construction des points de cette courbe pour $p = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{2}$ et $p = \frac{3}{4}$. Tracer la courbe à main levée.

3° Démontrer que cette courbe est nécessairement inscrite dans le triangle $ABC$.

4° Quelle pourrait être la nature géométrique de cette courbe de Bézier de degré 2 ? Justifier votre réponse.

## PROBLÈME II

### *Un si discret Monsieur Dirichlet*

Soit $\mathscr{S}$ un ensemble fini non vide de points du plan. Certaines paires de points de $\mathscr{S}$ sont reliées par des traits, de sorte qu'en suivant ces traits, éventuellement en plusieurs étapes, il est toujours possible de passer d'un point de $\mathscr{S}$ à n'importe quel autre (les intersections éventuelles entre les traits ne sont pas considérées et un point n'est jamais relié à lui-même).

Deux points de $\mathscr{S}$ reliés par un trait sont dits ***voisins***.

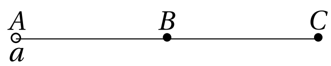
Si $M$ est un point de $\mathscr{S}$, on note $V(M)$ l'ensemble des voisins de $M$, et on note $d(M)$ le nombre de voisins de $M$, appelé le ***degré*** de $M$.

Chaque point de $\mathscr{S}$ a été colorié soit en bleu soit en jaune, et il y a au moins un point jaune dans l'ensemble $\mathscr{S}$. À chaque point jaune, Gustav a attribué un nombre réel de son choix. La mathématicienne Maryam voudrait alors attribuer un réel à chaque point bleu (pas forcément le même nombre d'un point bleu à l'autre) de façon à satisfaire la propriété ($\mathscr{P}$) suivante :

***($\mathscr{P}$) Le nombre attribué à tout point bleu est la moyenne des nombres attribués à ses voisins.***

### Partie A : Quelques exemples pour commencer

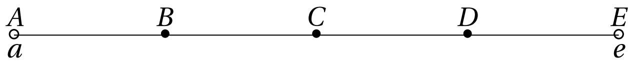
1° Dans cette question uniquement, on suppose que $\mathscr{S} = \{A, B, C\}$, avec $A$ voisin de $B$, lui-même voisin de $C$ comme sur dessin ci-dessous.



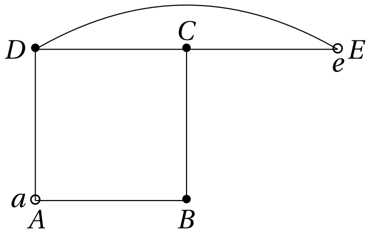

De plus, $A$ est le seul point jaune et Gustav lui a attribué le réel $a$.
Quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à $B$ et à $C$ afin de satisfaire la propriété ($\mathscr{P}$) ?

2° Pour les trois questions suivantes on suppose que $\mathscr{S} = \{A, B, C, D, E\}$. Les points $A$ et $E$ sont les seuls points jaunes, et Gustav leur a attribué respectivement les réels $a$ et $e$.

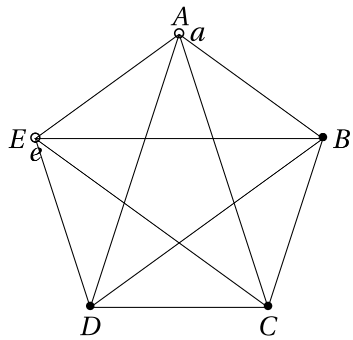
(a) Les liaisons étant indiquées selon le schéma suivant, quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à chacun des points $B, C$ et $D$ afin de satisfaire la propriété $(\mathscr{P})$ ?




(b) Même question pour le schéma suivant :




(c) Même question pour le schéma suivant :




3° Dans cette question uniquement on généralise le schéma de la question 2-(c) avec un nombre quelconque de points.

On suppose que $n \geqslant 1$ est un entier, que $\mathscr{S} = \{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}\}$ et que tout point de $\mathscr{S}$ est voisin de chaque autre point de $\mathscr{S}$. De plus, $P_0$ et $P_{n+1}$ sont les seuls points jaunes, et Gustav leur a attribué respectivement les réels $a$ et $b$. Quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à chacun des points $P_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ afin de satisfaire la propriété $(\mathscr{P})$ ?

## Partie B : Étude du cas général

On note respectivement $\mathscr{J}$ l'ensemble des points jaunes, et $\mathscr{B}$ l'ensemble des points bleus. Ainsi

$$\mathscr{S} = \mathscr{J} \cup \mathscr{B}.$$

Quand Gustav attribue un réel à chaque point jaune, cela consiste à définir une fonction $k$ de $\mathscr{J}$ dans $\mathbb{R}$.

L'objectif de Maryam est donc de construire une fonction $f : \mathscr{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(M) = k(M) \text{ si } M \text{ est jaune (1)} \\ \\ f(M) = \dfrac{f(P_1) + \ldots + f(P_d)}{d} \text{ si } M \text{ est bleu (2)} \\ \text{où } d = d(M) \text{ est le degré de } M \text{ (qui dépend de } M\text{) et } P_1, \ldots, P_d \text{ les voisins de } M. \end{cases}$$

On dira alors que $f$ est une solution ***pour l'attribution $k$.***

Dans cette partie, on suppose donc donnée une telle attribution $k$.

On note $K$ le plus grand des nombres $k(M)$ lorsque $M$ décrit l'ensemble $\mathscr{J}$.

## Existence d'une solution.

1° On suppose dans cette question que $k(M) \geqslant 0$ pour tout point $M \in \mathscr{J}$. On construit alors, par récurrence, la suite $(f_n)$ de fonctions suivante :

On pose $f_0(M) = k(M)$ si $M$ est jaune, et $f_0(M) = 0$ si $M$ est bleu.

Puis, pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$\begin{cases} f_{n+1}(M) = k(M) \text{ si } M \text{ est jaune,} \\ \\ f_{n+1}(M) = \dfrac{f_n(P_1) + \ldots + f_n(P_d)}{d} \text{ si } M \text{ est bleu,} \\ \text{où } d = d(M) \text{ est le degré de } M \text{ (qui dépend de } M) \text{ et } P_1, \ldots, P_d \text{ les voisins de } M. \end{cases}$$

(a) Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$ et tout point $M \in \mathscr{S}$, on a $0 \leqslant f_n(M) \leqslant f_{n+1}(M) \leqslant K$.

(b) En déduire l'existence d'une solution pour l'attribution $k$.

2° Prouver que si $f$ est une solution pour l'attribution $k$ et si $\alpha$ est une constante, alors la fonction $f+\alpha$ est aussi une solution pour l'attribution $k+\alpha$.

3° En déduire qu'il existe une solution à notre problème en général, c'est-à-dire sans l'hypothèse de la question 1° : $k(M) \geqslant 0$ pour tout point $M \in \mathscr{J}$.

## Unicité de la solution.

On suppose dans cette sous-partie que l'on dispose d'une solution $f$ pour cette attribution $k$.

4° Prouver que, pour tout point $M \in \mathscr{S}$, on a $f(M) \leqslant K$.

5° Supposons que $g$ soit également une solution pour l'attribution $k$.

(a) Justifier que la fonction $f - g$ vérifie la condition (2).

(b) Que vaut $f - g$ sur $\mathscr{J}$ ?

(c) En déduire que $f = g$.

6° Que peut-on dire de $f$ s'il n'y a qu'un seul point jaune ?

**PROBLÈME III**

***Les nombres en or***

On note $\varphi$ la plus grande racine réelle de l'équation $x^2 = x+1$. Le nombre $\varphi$, connu depuis l'Antiquité, est appelé *nombre d'or*. Un réel $x$ est dit un ***nombre en or*** s'il existe :

— deux entiers naturels $p$ et $q$

— des entiers $a_p, a_{p-1}, \cdots, a_0, ..., a_{-q}$ ne prenant que les valeurs 0 ou 1 tels que

$$x = a_p\varphi^p + a_{p-1}\varphi^{p-1} + \ldots + a_1\varphi + a_0 + a_{-1}\varphi^{-1} + \cdots + a_{-q}\varphi^{-q}.$$

Dans ce cas, on notera $x \rhd a_p a_{p-1} \cdots a_0, a_{-1} \cdots a_{-q}$.

Par exemple si $x = \varphi^3 + \varphi^2 + 1 + \dfrac{1}{\varphi} + \dfrac{1}{\varphi^4}$, on notera $x \rhd 1101,1001$. On dira que alors $1101,1001$ est une ***représentation en or*** de $x$.

Il est clair que l'on peut ajouter, au début, ou la fin de la représentation autant de 0 que l'on souhaite.

Une séquence de la représentation est une suite de 0 et de 1 qui apparaît dans la représentation. Dans l'exemple précédent, 10110 est une séquence de la représentation 1**101**,**10**01.

**Partie A : Tous les entiers naturels sont en or**

1° Montrer que, dans la représentation en or de $x$, on peut remplacer toute séquence 011 par 100 et réciproquement afin d'obtenir une autre représentation en or de $x$.

Par exemple le réel dont la représentation en or est $1101,1001$ admet également $1110,0001$ et $1101,0111$ comme représentation en or .

On dira que les deux séquences 011 et 100 sont équivalentes.

2° Plus généralement, donner une séquence dans laquelle il n'y a jamais deux 1 consécutifs et qui soit équivalente à $011\cdots1$ où il y a $n$ occurrences du chiffre 1.

3° Montrer que les entiers 2 et 3 sont des nombres en or et en donner une représentation en or.

4° Montrer que tous les entiers naturels admettent une représentation en or.

**Partie B : Représentation en or pur**

On dira qu'une représentation $x \rhd a_p a_{p-1} \cdots a_0, a_{-1} \cdots a_{-q}$ d'un nombre en or est en ***or pur*** si pour tout $i$,

$$a_i a_{i+1} = 0.$$

En d'autres termes, une représentation de $x$ est en or pur si elle ne contient jamais deux 1 consécutifs.

Soit $x$ un réel non nul, si $x \rhd a_p a_{p-1} \cdots a_0, a_{-1} \cdots a_{-q}$, on définit la ***teneur en or*** de la représentation comme étant égale à l'exposant de la plus grande puissance de $\varphi$ dont le coefficient vaut 1, dans l'égalité $x = a_p\varphi^p + \ldots \cdots + a_{-q}\varphi^{-q}$.

Par exemple la teneur de la représentation $1101,1001$ est égale à 3 et celle de $0,0010$ est égale à $-3$.

1° Donner une représentation en or pur des entiers 2, 3, 4 et 5.

2° Soit $x$ un réel ayant une représentation en or pur de teneur en or égale à $n$.

(a) Montrer que

$$\varphi^n \leqslant x < \varphi^{n+1}.$$

(b) Montrer que la représentation en or pur d'un réel, si elle existe, est unique.

3° Soit $x$ un réel non nul ayant une représentation en or pur.

(a) Exprimer la teneur en or de la représentation en or pur de $x$ à l'aide des fonctions logarithme népérien et partie entière.

(b) Écrire un algorithme permettant de déterminer cette représentation.

(c) Appliquer votre algorithme pour $x = 2018$.

4° Montrer qu'un réel en or possède forcément une représentation en or pur.

5° Montrer qu'il existe des réels strictement positifs qui ne sont pas en or.