BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2008

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B *CODE : MATGRB1*

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENT
Aménagement finition	2
Assistance technique d'ingénieur	2
Bâtiment	2
Conception et réalisation de carrosseries	2
Construction navale	2
Constructions métalliques	2,5
Domotique	2
Enveloppe du bâtiment : façade – étanchéité	2
Etudes et économie de la construction	2
Fluides – énergies – environnements	2
Géologie appliquée	1,5
Industrialisation des produits mécaniques	2
Maintenance et après-vente automobile	2
Maintenance et après-vente des engins de travaux publics et de manutention	1
Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques	1
Maintenance industrielle	2
Mécanique et automatismes industriels	2
Moteurs à combustion interne	2
Traitement des matériaux	3
Travaux publics	2

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (12 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = x\,\mathrm{e}^x$
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur R, et y' la fonction dérivée de y.

1° Déterminer les solutions définies sur R de l'équation différentielle (E_0) :
$$y' - 2y = 0.$$

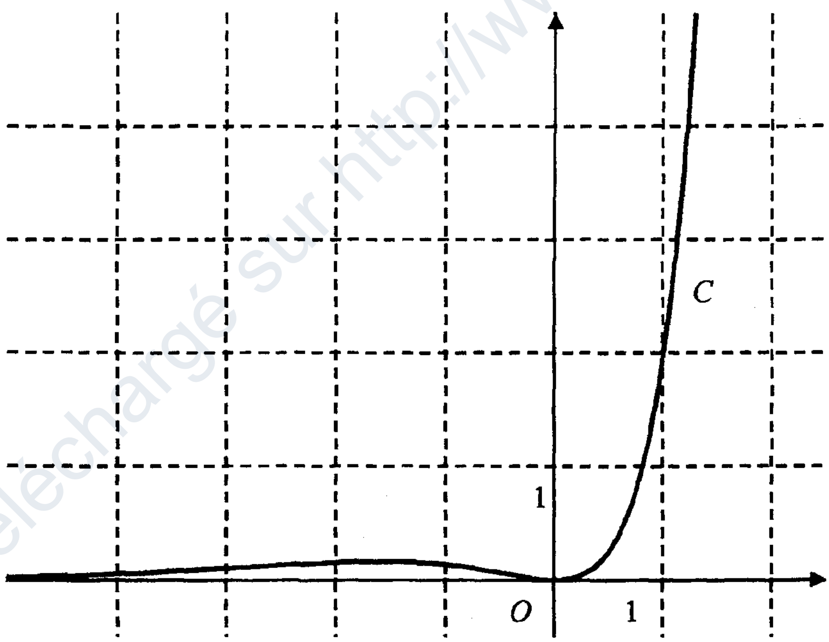
2° Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = (-x - 1)\,\mathrm{e}^x$.
Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x + 1)\,\mathrm{e}^x$. Sa courbe représentative C est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1° a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = e^x(2e^x - 2 - x)$.

b) En déduire le coefficient directeur $f'(0)$ de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

Interpréter graphiquement ce résultat.

2° a) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

b) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

C. Calcul intégral

1° On note $I = \int_{-0,3}^{0,3} \frac{x^2}{2}\,dx$.

Démontrer que $I = 0,009$.

2° On note $J = \int_{-0,3}^{0,3} e^{2x}\,dx$.

Démontrer que $J = 0,5\,(e^{0,6} - e^{-0,6})$.

3° On note $K = \int_{-0,3}^{0,3} (x+1)\,e^x\,dx$.

Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 0,3\,(e^{0,3} + e^{-0,3})$.

4° On note $L = \int_{-0,3}^{0,3} f(x)\,dx$.

a) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de L.

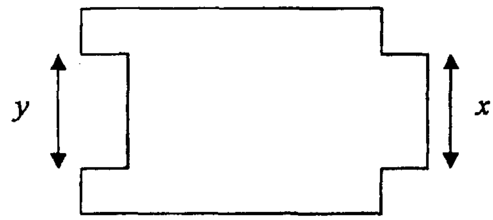
b) Donner la valeur approchée de L arrondie à 10^{-5}.

c) Vérifier que la valeur exacte de I et la valeur approchée de L obtenue à la question précédente diffèrent de $4,5 \times 10^{-4}$.

EXERCICE 2 (8 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique en grande série des pièces en bois. Ces pièces sont prévues pour s'encastrer les unes dans les autres.



Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

A. Loi normale

Une pièce de ce type est conforme lorsque sa cote x, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle [9,5 ; 10,5] et lorsque sa cote y appartient à l'intervalle [10,5 ; 11,5].

1° On note X la variable aléatoire qui, à chaque pièce de ce type prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe sa cote x. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 10 et d'écart type 0,21.
Calculer $P(9,5 \leq X \leq 10,5)$.

2° On note Y la variable aléatoire qui, à chaque pièce de ce type prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe sa cote y. On admet que $P(10,5 \leq Y \leq 11,5) = 0,985$.

On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée. Déterminer la probabilité qu'elle soit conforme.

B. Loi binomiale et loi de Poisson

On considère un stock important de pièces.
On note E l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans le stock de pièces est défectueuse ».
On suppose que $P(E) = 0{,}03$.
On prélève au hasard 50 pièces dans le stock de pièces pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 pièces.
On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1° Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2° Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z \leq 2)$.

3° On considère que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z peut être approchée par une loi de Poisson.

a) Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b) On désigne par Z_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ a la valeur obtenue au a).
En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 50 pièces, au plus deux pièces soient défectueuses.

C. Intervalle de confiance

Dans cette partie on considère une grande quantité de pièces devant être livrées à une chaîne d'hypermarchés. On considère un échantillon de 100 pièces prélevées au hasard dans cette livraison. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.
On constate que 96 pièces sont sans aucun défaut.

1° Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des pièces de cette livraison qui sont sans aucun défaut.

2° Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 pièces prélevées au hasard et avec remise dans cette livraison, associe la fréquence des pièces de cet échantillon qui sont sans aucun défaut.

On suppose que F suit la loi normale de moyenne p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$, où p est la fréquence inconnue des pièces de la livraison qui sont sans aucun défaut.
Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p avec le coefficient de confiance 95%.

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\operatorname{Arc\,sin} t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\operatorname{Arc\,tan} t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
t^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	e^{at} $(a \in \mathbb{C})$	$a e^{at}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$\left(e^u\right)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u},\ u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k e^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ …….. où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ ……… où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

3. PROBABILITES

a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) Loi exponentielle

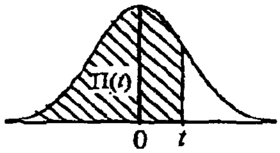
Fonction de fiabilité : $R(t) = e^{-\lambda t}$ $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$

∽ Brevet de technicien supérieur ∾ session 2008 - groupement B

Exercice 1 **12points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = x\text{e}^x$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' - 2y = 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (-x-1)\text{e}^x.$$

Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

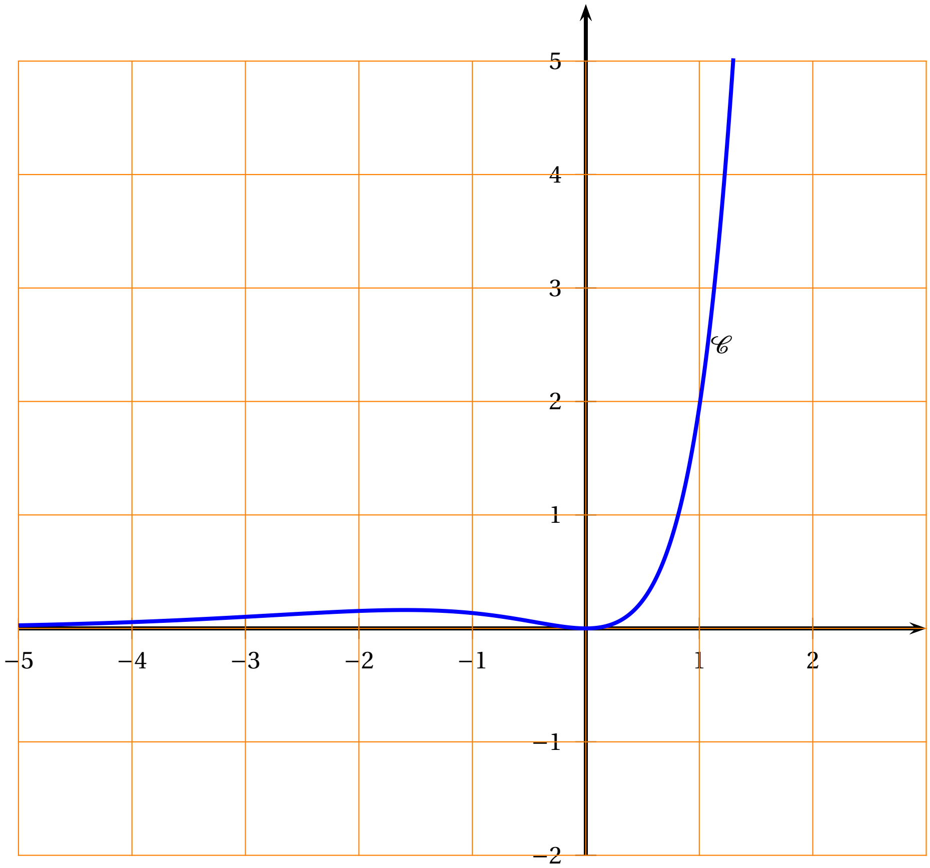
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^{2x} - (x+1)\text{e}^x.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1. **a.** Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \text{e}^{x}(2\text{e}^{x} - 2 - x)$.

   b. En déduire le coefficient directeur $f'(0)$ de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   Interpréter graphiquement ce résultat.

2. **a.** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \text{e}^{2x}$.

   b. Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

C. Calcul intégral

1. On note $I = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} \frac{x^2}{2}\,\text{d}x$.
   Démontrer que $I = 0,009$.
2. On note $J = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} \text{e}^{2x}\,\text{d}x$.
   Démontrer que $J = 0,5\left(\text{e}^{0,6} - \text{e}^{-0,6}\right)$.
3. On note $K = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} (x+1)\text{e}^{x}\,\text{d}x$.
   Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 0,3\left(\text{e}^{0,3} + \text{e}^{-0,3}\right)$.
4. On note $L = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} f(x)\,\text{d}x$.

   a. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de L.

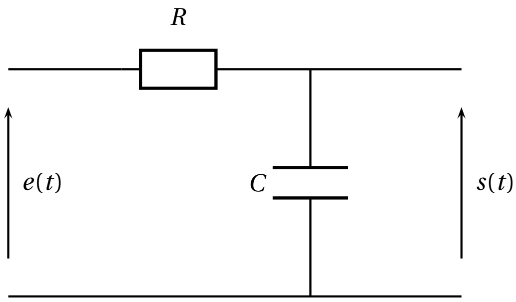
b. Donner la valeur approchée de L arrondie à 10^{-5}.

c. Vérifier que la valeur exacte de I et la valeur approchée de L obtenue à la question précédente différent de $4,5 \times 10^{-4}$.

Exercice 2 **8 points**

La question 5. de cet exercice peut-être traitée de façon indépendante

On considère le circuit représenté ci-dessous alimenté à tout instant t par une tension $e(t)$ et on note $s(t)$ la tension aux bornes du condensateur.



L'équation différentielle régissant ce circuit est

$$(1): \quad RCs'(t) + s(t) = e(t)$$

avec $s(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et où s' est la dérivée de la fonction s.
En utilisant la transformation de Laplace, on se propose de rechercher la tension $s(t)$ aux bornes du condensateur dans le cas suivant :

- $e(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - O,1)$ où la fonction $\mathcal{U}$ est la fonction échelon unité définie par
  $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geqslant 0$;
- $R = 10\ \Omega$ et $C = O,004$F.

Pour cela on admet que les fonctions s, s' et e admettent des transformées de Laplace.
On note $E(p) = \mathcal{L}[e(t)]$ et $S(p) = \mathcal{L}[s(t)]$.

1. Sur une feuille de papier millimétré, tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de e sur l'intervalle [0 ; 0,2]. On prendra comme unité 1 cm pour 0,02 sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

2. Déterminer $E(p) = \mathcal{L}[e(t)]$.

3. **a.** En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (1), déterminer une expression de $S(p)$ en supposant que $s\left(0^+\right) = 0$.

b. Montrer que $S(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+25} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+25}\right)\mathrm{e}^{-0,1p}.$$

4. **a.** Déterminer $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+25}\right]$.

b. En déduire $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+25}\right]\mathrm{e}^{-0,1p}$

c. En déduire la tension $s(t) = \mathcal{L}^{-1}[S(p)]$.

5. On admet que si $t \in [0~;~0,1[$, $s(t) = 1 - \mathrm{e}^{-25t}$ et si $t \in [0,1~;~+\infty[$, $s(t) = \mathrm{e}^{-25t}\left(\mathrm{e}^{2,5} - 1\right)$.

a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera des valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près.

t	0	0,025	0,05	0,075	0,100	0,125	0,15	0,175	0,2
$s(t)$									

b. Construire une représentation de s sur le même graphique que celle de e.

Formulaire

$$f(t)\mathscr{U}(t) \underset{\mathscr{L}^{-1}}{\overset{\mathscr{L}}{\rightleftarrows}} F(p)$$

On rappelle les formules suivantes sur la transformation de Laplace.

$$\mathscr{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathscr{L}[f] + \mu \mathscr{L}[g].$$

$$\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)] = \frac{1}{p}.$$

$$\mathscr{L}[f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)] = \frac{1}{p+a}.$$

Plus généralement, si on note $\mathscr{L}[f(t)\mathscr{U}(t)] = F(p)$ alors,

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)\mathscr{U}(t-\tau)] = F(p)\mathrm{e}^{-\tau p}$$

$$\mathscr{L}[f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)] = F(p+a);$$

.

$$\mathscr{L}[f'(t)\mathscr{U}(t)] = pF(p) - f(O^{+});$$