

◌ Brevet de technicien supérieur ◌  
 Groupement B session 2005  
 Métropole – Polynésie

A. P. M. E. P.

**Exercice 1**

**11 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

*A. Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle (E) :

$$(1+x)y' + y = \frac{1}{1+x}$$

où  $y$  est une fonction de la variable réelle  $x$ , définie et dérivable sur  $] -1; +\infty[$  et  $y'$  sa fonction dérivée.

- Démontrer que les solutions sur  $] -1; +\infty[$  de l'équation différentielle (E<sub>0</sub>) :

$$(1+x)y' + y = 0$$

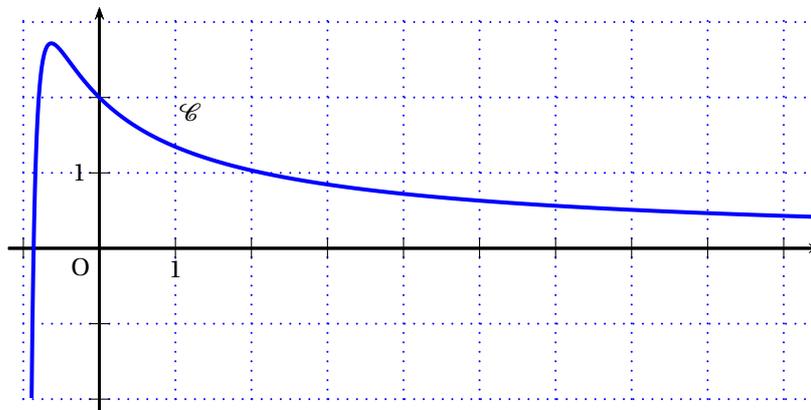
sont les fonctions définies par  $h(x) = \frac{k}{x+1}$  où  $k$  est une constante réelle quelconque.

- Soit  $g$  la fonction définie sur  $] -1; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ .  
Démontrer que la fonction  $g$  est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
- Déterminer la solution  $f$  de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale  $f(0) = 2$ .

*B. Étude d'une fonction*

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x}$

Sa courbe représentative  $\mathcal{C}$ , dans un repère orthonormal où l'unité graphique est 1 cm, est donnée ci-dessous.



- On admet que  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .  
Que peut-on en déduire pour la courbe  $\mathcal{C}$  ?

2. a. Démontrer que, pour tout  $x$  de  $] -1 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{-1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$
- b. Résoudre dans  $] -1 ; +\infty[$  l'inéquation  $-1 - \ln(1+x) \geq 0$ .  
En déduire le signe de  $f'(x)$  lorsque  $x$  varie dans  $] -1 ; +\infty[$ .
- c. Établir le tableau de variation de  $f$ .
3. Un logiciel de calcul formel donne le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction  $f$  :

$$f(x) = 2 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Ce résultat, admis, n'a pas à être démontré.

- a. En déduire une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.
- b. Étudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{T}$  au voisinage de leur point d'abscisse 0.

### C. Calcul intégral

1. Déterminer la dérivée de la fonction  $G$  définie sur  $] -1 ; +\infty[$  par :

$$G(x) = \frac{1}{2} [\ln(1+x)]^2$$

2. En déduire qu'une primitive de  $f$  sur  $] -1 ; +\infty[$  est définie par :

$$F(x) = 2 \ln(1+x) + \frac{1}{2} [\ln(1+x)]^2$$

3. a. On note  $I = \int_0^2 f(x) dx$ . Démontrer que  $I = \frac{1}{2} (\ln 3)^2 + 2 \ln 3$ .
- b. Donner la valeur approchée arrondie à  $10^{-2}$  de  $I$ .
- c. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu au b.

### Exercice 2

9 points

**Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.**

Une usine fabrique, en grande quantité, des rondelles d'acier pour la construction. Leur diamètre est exprimé en millimètres.

**Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats approchés sont à arrondir à  $10^{-2}$**

#### A. Loi normale

Une rondelle de ce modèle est conforme pour le diamètre lorsque celui-ci appartient à l'intervalle  $[89,6 ; 90,4]$ .

1. On note  $X_1$  la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre. On suppose que la variable aléatoire  $X_1$  suit la loi normale de moyenne 90 et d'écart-type  $\sigma = 0,17$ . Calculer la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production soit conforme.

2. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des rondelles : Il est envisagé de modifier le réglage des machines produisant les rondelles.

On note  $D$  la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée dans la production future, associera son diamètre. On suppose que la variable aléatoire  $D$  suit une loi normale de moyenne 90 et d'écart-type  $\sigma_1$ .

Déterminer  $\sigma_1$  pour que la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production future soit conforme pour le diamètre soit égale à 0,99.

### B. Loi binomiale

On note  $E$  l'évènement : « une rondelle prélevée au hasard dans un stock important a un diamètre défectueux ».

On suppose que  $P(E) = 0,02$ .

On prélève au hasard quatre rondelles dans le stock pour vérification de leur diamètre. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de quatre rondelles.

On considère la variable aléatoire  $Y_1$  qui à tout prélèvement de quatre rondelles associe le nombre de rondelles de ce prélèvement ayant un diamètre défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire  $Y_1$  suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucune rondelle n'ait un diamètre défectueux. Arrondir à  $10^{-3}$ .
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus une rondelle ait un diamètre défectueux. Arrondir à  $10^{-3}$ .

### C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les rondelles sont commercialisées par lot de 1 000.

On prélève au hasard un lot de 1 000 dans un dépôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 rondelles.

On considère la variable aléatoire  $Y_2$  qui, à tout prélèvement de 1 000 rondelles, associe le nombre de rondelles non conformes parmi ces 1 000 rondelles.

On admet que la variable aléatoire  $Y_2$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 1000$  et  $p = 0,02$ . On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire  $Y_2$  par la loi normale de moyenne 20 et d'écart-type 4,43.

On note  $Z$  une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 20 et d'écart-type 4,43.

1. Justifier les paramètres de cette loi normale.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes dans le lot de 1 000 rondelles, c'est à dire calculer  $P(Z \leq 15,5)$

### D. Test d'hypothèse

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la moyenne  $\mu$  de l'ensemble des diamètres, en millimètres, de rondelles constituant une grosse livraison à effectuer.

On note  $X_2$  la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la livraison, associe son diamètre.

La variable aléatoire  $X_2$  suit la loi normale de moyenne inconnue  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma = 0,17$ .

On désigne par  $\bar{X}_2$  la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 rondelles prélevé dans la livraison, associe la moyenne des diamètres de ces rondelles (la livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

L'hypothèse nulle est  $H_0 : \mu = 90$ . Dans ce cas la livraison est dite conforme pour le diamètre.

L'hypothèse alternative est  $H_1 : \mu \neq 90$ .

Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test en admettant, sous l'hypothèse nulle  $H_0$ , le résultat suivant qui n'a pas à être démontré :

$$P\left(89,967 \leq \bar{X}_2 \leq 90,033\right) = 0,95$$

2. On prélève un échantillon de 100 rondelles dans la livraison et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres est  $\bar{x} = 90,02$ .  
Peut-on, au seuil de risque de 5 %, conclure que la livraison est conforme pour le diamètre ?