

**Exercice 1 (11 points)**

**Partie A – Résolution d'une équation différentielle**

On considère l'équation différentielle (E) :  $y'' + 2y' + y = x + 4$ , où  $y$  désigne une fonction de la variable réelle  $x$ , définie et deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- 1) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :  $y'' + 2y' + y = 0$ .
- 2) Vérifier que la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x$  par  $g(x) = x + 2$ , est une solution particulière de (E).  
En déduire les solutions de (E).
- 3) Déterminer la solution  $f$  de (E) qui vérifie les deux conditions  $f(0) = 2$  et  $f'(0) = 0$ .

**Partie B – Étude d'une fonction**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -xe^{-x} + x + 2$ .

- 1) Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .  
(On pourra si besoin écrire la fonction sous la forme  $f(x) = -x(e^{-x} - 1) + 2$ .)
- 2) Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ . Calculer  $f'(x)$ .
- 3) On admet que le tableau de variations de la fonction  $f'$  est le suivant

$x$	$-\infty$	$2$		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$e^{-2} + 1$		$1$

Calculer  $f'(0)$ . En déduire le signe de  $f'(x)$ .

- 4) Établir le tableau de variations de  $f$ .

**Partie C – Étude graphique**

On note C la représentation graphique de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Montrer que la droite D d'équation  $y = x + 2$  est asymptote à la courbe C.
- 2) Construire D et C (unité graphique 2 cm).
- 3) On note A l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan limitée sur le graphique précédent par D, C et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 2$ .  
Exprimer A à l'aide d'une intégrale.  
Déterminer par la méthode d'intégration par parties la valeur exacte de A, puis en donner une valeur décimale arrondie au  $\text{mm}^2$ .

## Exercice 2 (9 points)

Un grossiste en fournitures de bureau revend un ruban adhésif transparent répondant à deux critères :

- (i) pouvoir être repositionné au moins une fois sans arracher le support, noté  $C_1$ .
- (ii) ne pas jaunir le papier sur lequel il est posé, noté  $C_2$ .

Les réponses des trois parties sont indépendantes. Les résultats numériques seront arrondis à  $10^{-3}$ .

### Partie A

Ce grossiste a trois fournisseurs Rubatop, ADZif et S.A.Col.

Il commande 27% des rubans adhésifs transparents chez Rubatop, 33% chez ADZif et 40% chez S.A.Col. Le pourcentage de rubans qui ne répondent pas au critère  $C_1$  est 2,9% chez Rubatop, 3,1% chez ADZif et 4,2% chez S.A.Col.

Ensuite, les rubans sont répartis dans le rayon sans tenir compte du fournisseur.

1. Un client prend au hasard un ruban adhésif dans le rayon.  
Montrez que la probabilité d'obtenir un ruban ne répondant pas au critère  $C_1$  est 0,035 à  $10^{-3}$  près.
2. Le chef de rayon, après réclamation d'un client, a en main un ruban adhésif ne répondant pas au critère  $C_1$ . Quelle est la probabilité que ce ruban vienne de chez ADZif ?

### Partie B

La probabilité qu'un ruban adhésif jaunisse le papier est de 0,008. Un client achète 500 rubans adhésifs. On assimilera le choix de ces 500 rubans à un tirage aléatoire avec remise.

On s'intéresse à la variable aléatoire  $X$  qui compte, dans ce lot de 500 rubans adhésifs, le nombre de ceux qui jaunissent le papier.

1. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 1 de ces 500 rubans adhésifs jaunisse le papier ?

### Partie C

Après leur utilisation, le client s'aperçoit que six rubans adhésifs sur les 500 jaunissent le papier. Il décide donc de demander au grossiste de vérifier si le lot est compatible avec son affirmation d'avoir dans son stock 0,8% des rubans ne satisfaisant pas au critère  $C_2$ .

Pour étudier cette réclamation, le grossiste construit un test unilatéral.

1. Quelle est l'hypothèse  $H_0$ ? Quelle est l'hypothèse  $H_1$ ?
2. On désigne par  $F$  la variable aléatoire qui, à tout lot de 500 rubans adhésifs prélevés au hasard avec remise, associe la fréquence de rubans qui jaunissent le papier. On suppose, sous l'hypothèse nulle, que  $F$  suit la loi normale de moyenne 0,008 et d'écart-type  $\sqrt{\frac{0,008(1-0,008)}{500}}$ .
  - a) Déterminer le nombre  $a$  tel que  $p(F < 0,008 + a) = 0,95$ .
  - b) Énoncer la règle de décision du test.
3. Au risque de 5%, et suite à la requête de son client sur l'échantillon des 500 rubans qu'il a acheté, le grossiste doit-il remettre en cause son affirmation ?