

œ Brevet de technicien supérieur Métropole œ
septembre 2020 - Groupement C1-C2

A. P. M. E. P.

Exercice 1

10 points

À la sortie d'un four, un solide dont la température est de $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ est placé, pour le refroidir, dans une pièce dont la température ambiante reste constante et égale à $T_{amb} = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Le solide peut être emballé pour expédition dès que sa température passe au-dessous de $40\text{ }^{\circ}\text{C}$.

On désigne par $T(t)$, la température, en degré Celsius ($^{\circ}\text{C}$), du solide à l'instant t (t exprimé en minute).

$T'(t)$ représente la vitesse de refroidissement à l'instant t . La loi de Newton établit que cette vitesse est proportionnelle à la différence entre la température du solide et la température ambiante, soit :

$$T'(t) = k(T(t) - T_{amb})$$

où k est une constante et T_{amb} la température ambiante, en degré Celsius, de la pièce.

Partie A

1. La constante k dépend des matériaux. Pour le solide qui nous intéresse, $k = -0,07$.
Montrer que T est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0,07y = 1,4$$

où y désigne une fonction de la variable t définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et y' la fonction dérivée de y .

2. Résoudre, dans $[0; +\infty[$, l'équation différentielle $(E_0) : y' + 0,07y = 0$.
3. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule des trois réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. La bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent de point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.*

Une solution particulière de (E) est la fonction f définie par :

a. $f(t) = 20$	b. $f(t) = 1,4$	c. $f(t) = 20t$
-----------------------	------------------------	------------------------

4. En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E) .
5. **a.** D'après l'énoncé, donner $T(0)$.
b. Déterminer une expression de la température $T(t)$ du solide, à l'instant t .

Partie B

Dans cette partie, on admet que pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, $T(t) = 50e^{-0,07t} + 20$.

On donne ci-dessous \mathcal{C} , la courbe représentative de la fonction T dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. À l'aide du graphique ci-dessus :
 - a. déterminer la température du solide au bout de 10 minutes.
 - b. déterminer au bout de combien de temps le solide peut être emballé pour expédition.
2. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats ci-dessous que l'on pourra utiliser dans les questions suivantes :

1	$f(x) := \exp((-0,07) * x)$	$x \rightarrow \exp(-0,07 * x)$
2	$\text{deriver}(f(x))$	$-0,07 * \exp(-0,07 * x)$
3	$\text{limite}(f(x), x, +\text{infinity})$	0
4	$\text{integration}(f(x), x, 0, 10)$	7,19163851727

- a. En reliant T à f , établir les variations de la fonction T sur $[0; +\infty[$.
- b. Expliquer pourquoi la température du solide ne peut atteindre 18°C .
- c. Déterminer au dixième près la température moyenne du solide lors des dix premières minutes.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction g sur un intervalle $[a; b]$ est :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt.$$

Exercice 2**10 points**

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Le tableau ci-dessous donne l'évolution des ventes de vélos à assistance électrique en France entre 2007 et 2017.

Année	2007	2009	2011	2013	2015	2017
Rang de l'année : x_i	0	2	4	6	8	10
Nombre de vélos à assistance électrique vendus (en milliers) : n_i	10	23	37	57	102	278

Données : Observatoire du Cycle

- On a représenté, en annexe 1, à rendre avec la copie, le nuage des trois premiers points associé à la série $(x_i ; n_i)$.
 - Compléter le nuage de points.
 - Expliquer pourquoi un ajustement affine ne semble pas envisageable.
- On pose $y_i = \ln(x_i)$. Compléter au centième près le tableau donné en annexe 2, à rendre avec la copie.
- On s'intéresse à l'ajustement affine de y_i en fonction de x_i .
Voici le résultat obtenu à l'aide d'une calculatrice :

```

LinearReg
  a = 0,30742857
  b = 2,35285714
  r = 0,98986741
  r2 = 0,9798375
  MSe = 0,03403428
y = ax + b

```

Donner une équation de la droite de régression de y en x (on arrondira les coefficients au dixième).

- Si l'évolution se poursuit de la même façon, quel devrait être, en milliers, le nombre de vélos à assistance électrique vendus en France en 2020?

Partie B

Une entreprise produit en grande série des vélos à assistance électrique équipés de batteries au lithium-ion.

On propose d'étudier l'autonomie en kilomètre de ces vélos à assistance électrique en se plaçant dans des conditions usuelles de fonctionnement.

Soit X , la variable aléatoire qui, à chaque vélo à assistance électrique pris au hasard dans la production, associe son autonomie en kilomètre.

On admet que cette variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 81$ et d'écart type $\sigma = 4$.

Dans cette partie toutes les probabilités seront arrondies au millième.

- Déterminer la probabilité que l'autonomie d'un vélo à assistance électrique pris au hasard dans la production soit supérieure à 84 kilomètres.

2. a. Cette question est une question à choix multiples. Une seule des trois réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. La bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

Une valeur approchée à l'unité du réel d tel que : $P(X \leq d) = 0,1$ est :

a. 88	b. 81	c. 76
-------	-------	-------

- b. Interpréter le résultat dans le cadre de cette étude.

Partie C

Dans cette partie, on considère que 4 % des batteries au lithium-ion présentent un défaut et sont qualifiées de « non conformes ».

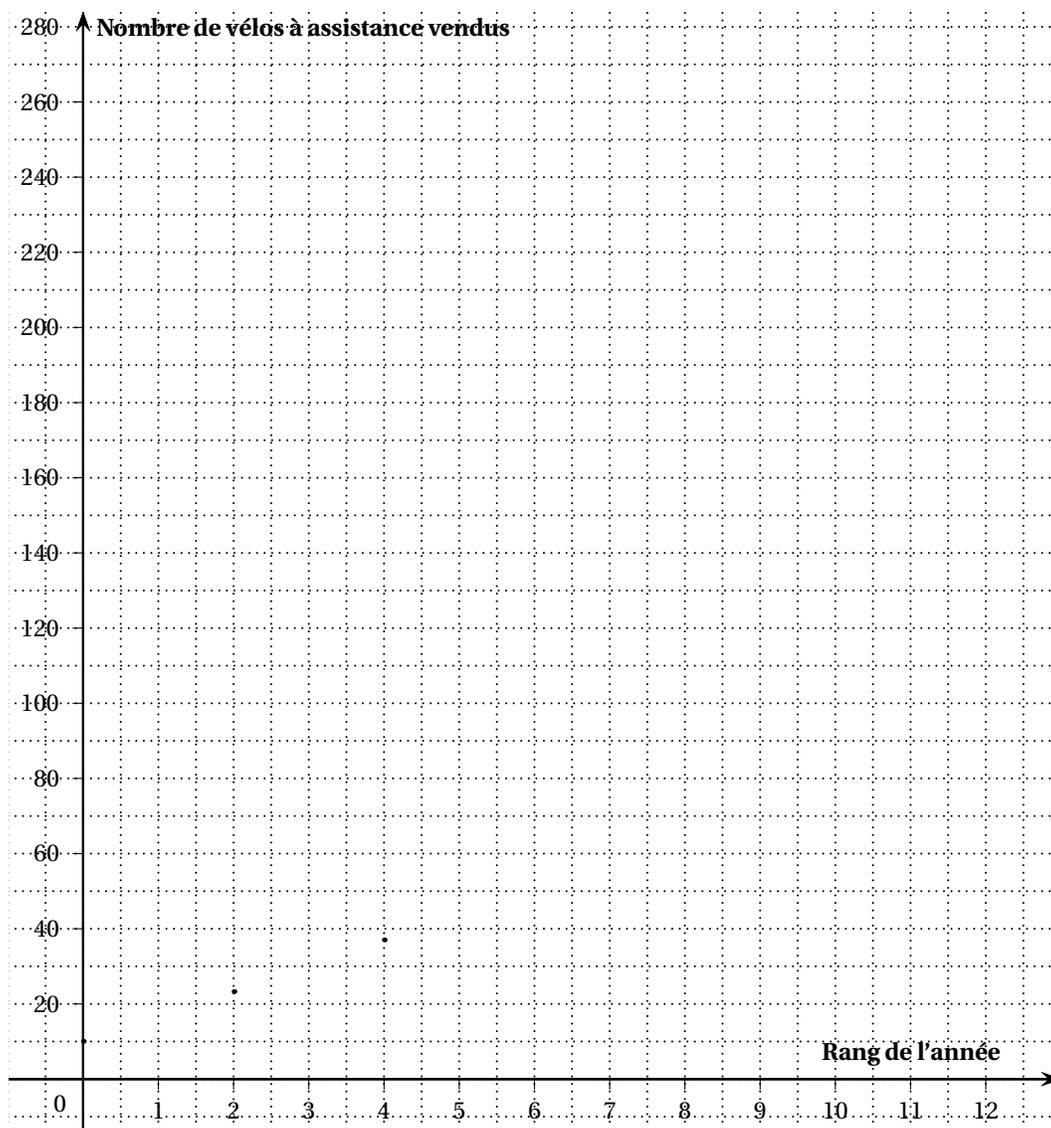
Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 batteries pris au hasard dans la production, associe le nombre de batteries non conformes.

La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler un tel prélèvement de 100 batteries à un tirage avec remise.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire Y ? Justifier et donner les paramètres de cette loi.
2. a. Déterminer $P(Y \leq 5)$.
b. Interpréter ce résultat.
3. Déterminer la probabilité que, dans un prélèvement au hasard de 100 batteries, toutes les batteries soient conformes.
4. Calculer $E(Y)$. Interpréter le résultat.

Annexes à rendre avec la copie

Annexe 1 : exercice 2, partie A, question 1.



Annexe 2 : exercice 2, partie A, question 2.

Année	2007	2009	2011	2013	2015	2017
Rang de l'année : x_i	0	2	4	6	8	10
Nombre de VAE vendus (en milliers) : n_i	10	23	37	57	102	278
$y_i = \ln(n_i)$	2,3	3,14	3,61			